

CENTRO UNIVERSITÁRIO DA FEI
ERIVELTON GUALTER DOS SANTOS

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DO *WHEELIE* EM CADEIRAS DE RODAS HÍBRIDAS

SÃO BERNARDO DO CAMPO
2016



Centro Universitário da FEI
Relatório Parcial



MODELAGEM E SIMULAÇÃO DO *WHEELIE* EM CADEIRAS DE RODAS HÍBRIDAS

Trabalho de iniciação científica apresentada
ao Centro Universitário da FEI com apoio do
CNPq, orientada pelo Prof. Dr. Marko
Ackermann

SÃO BERNARDO DO CAMPO
2016

RESUMO

Os usuários de cadeiras de rodas enfrentam várias dificuldades no dia-a-dia que incluem alto consumo energético durante a propulsão e esforço excessivo nos membros superiores levando, frequentemente, a dores e lesões articulares. Algumas soluções vêm sendo propostas para reduzir estes esforços, dentre as quais pode-se citar as promissoras cadeiras de rodas híbridas, dotadas de motores que auxiliam o cadeirante durante a propulsão manual da cadeira de rodas. Por outro lado, dentre todas as dificuldades dos cadeirantes, talvez a maior delas seja a transposição de obstáculos tais como degraus e desníveis. Para executar esta tarefa eles frequentemente realizam uma manobra conhecida como “*wheelie*” que consiste em empinar os pneus dianteiros da cadeira de rodas buscando o equilíbrio sobre as rodas traseiras para ultrapassar a barreira. A dificuldade para garantir o equilíbrio durante esta tarefa pode causar acidentes graves. O objetivo desta proposta de iniciação científica foi estudar, modelar e simular esta tarefa para cadeiras de rodas híbridas.

Palavras Chave

- “*Wheelie*”, Modelagem, Simulação.

LISTA DE FIGURAS

Figure 1- Cama de criança ilustrada no vaso encontrado na Grécia.	10
Figure 2 - Cama de criança ilustrada no vaso encontrado na Grécia.	11
Figure 3- Rei Filipe II em sua cadeira.	12
Figure 4 - Veículo fabricado por Stephan Farfler.	12
Figure 5 – Cadeira de rodas elaborada por Harry Jennings.	13
Figure 6 - Cadeira de Rodas Manual.	14
Figure 7 - Cadeira de Rodas Motorizada.	15
Figure 8 - Cadeira de Rodas Manual.	16
Figure 9 - Execução do “ <i>Wheelie</i> ”.	17
Figure 10 - Execução do <i>wheelie</i> para subir em uma prancha.	18
Figure 11- Relação do centro de gravidade com o eixo da roda.	19
Figure 12 - CG do sistema e forças normais nas rodas.	19
Figure 13 – Diagrama de corpo livre para o sistema om 1 DOF	22
Figure 14 - Diagrama de corpo livre para o sistema om 2 DOF.	25
Figure 15 – Sistema Cadeira de Rodas + Usuário como um único bloco.	28
Figure 16 – Efeito da resistência ao rolamento no pneu	29
Figure 17 – Ilustração da resistência ao rolamento e a distribuição de tensões normais na superfície de contato.	30
Figure 18 – Classificação dos métodos para obter o momento de inércia.	33
Figure 19 – Pêndulo físico	34
Figure 20 – Representação do experimento para determinar o centro de massa	37
Figure 21 – Realimentação de estado.	38
Figure 22 – Experimento para obter centro de massa da cadeira de rodas.	39
Figure 23 – Intersecção entre as retas	40
Figure 24 – Segmentos corporais em relação a altura do usuário.	41

Figure 25 – Centro de Massa do usuário sentado na cadeira de rodas para um usuário de 1,70 m	42
Figure 26 – Medição da massa da cadeira de rodas	43
Figure 27 – Cadeira de rodas instrumentada com tacômetro.....	44
Figure 28 – Massa normalizada.	45
Figure 29 – Massa fixada na extremidade da roda.....	46
Figure 30 – Velocidade obtida pelo tacômetro.	46
Figure 31 – Decaimento da velocidade da massa.	47
Figure 32 - Oscilação da cadeira de rodas	49
Figure 33 – Experimento de oscilação da cadeira de rodas	50
Figure 34 – Resultado final da oscilação da cadeira de rodas.....	50
Figure 35- Análise do torque que deve ser aplicado a roda para empinar a CR.	52
Figure 36 – Simulação do regulador linear	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Influências de diferentes características sobre a resistência ao rolamento.....	31
Tabela 2 – Valores do seno para pequenos ângulos.....	35
Tabela 4 – Dados para cálculo do centro de massa.....	41
Tabela 3 – Resultado do experimento para determinar o momento de inércia.	48

SUMÁRIO

RESUMO.....	3
LISTA DE FIGURAS	4
LISTA DE TABELAS	6
SUMÁRIO.....	7
1. INTRODUÇÃO	9
1.1. OBJETIVO	10
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
2.1. BREVE HISTÓRIA DA CADEIRA DE RODAS.....	10
2.2. IDENTIFICAÇÃO DOS USUÁRIOS DE CADEIRAS DE RODAS	13
2.3. TIPOS DE CADEIRA DE RODAS	14
2.4. “ <i>WHEELIE</i> ” (EMPINAR).....	17
2.5. MODELAGEM DO “ <i>WHEELIE</i> ”.....	18
2.6. <i>WHEELIE</i> COM AS CADEIRAS DE RODAS HÍBRIDAS	20
3. PROJETO	20
3.1. MODELAGEM DA CADEIRA DE RODAS.....	20
3.1.1. MODELO DINÂMICO COM 1 GRAU DE LIBERDADE	22
3.1.2. MODELO DINÂMICO COM 2 GRAUS DE LIBERDADE	25
3.1.2.1. LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA	27
3.1.3. TRANSIÇÃO DO ESTADO COM 1 GRAU PARA 2 GRAUS DE LIBERDADE	27
3.1.4. RESISTENCIA AO ROLAMENTO	29
3.1.5. RESISTÊNCIA AERODINÂMICA	31
3.1.6. CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA	32
3.1.7. PÊNDULO FÍSICO	33
3.1.8. CENTRO DE MASSA (CM)	36
3.2. CONTROLE	37
3.3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.....	39
3.3.1. CENTRO DE MASSA DA CADEIRA DE RODAS	39

3.3.2.	CENTRO DE MASSA DO USUÁRIO	40
3.3.3.	MASSA DA CADEIRA DE RODAS	43
3.3.4.	MOMENTO DE INÉRCIA DA RODA TRASEIRA	44
3.3.5.	MOMENTO DE INÉRCIA DA CADEIRA DE RODAS.....	48
3.3.6.	FORÇA APLICADA PARA INICIAR O <i>WHEELING</i>	51
3.4.	SIMULAÇÃO DO REGULADOR LINEAR	52
4.	CONCLUSÃO	53
5.	APÊNDICE.....	54
5.1.	ARTIGO PUBLICADO	54
5.2.	DESENHO DE BLOCOS PARA EXTRAÇÃO DE DADOS DO TACÔMETRO.....	61
5.3.	FILTRO DO SINAL OBTIDO PELO TACÔMETRO	61
6.1.	CENTRO DE MASSA DO USUÁRIO.....	63
6.2.	TORQUE NECESSÁRIO PARA REALIZAR O <i>WHEELING</i>	67
6.3.	MODELO NÃO LINEAR	71
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72

1. Introdução

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), aproximadamente 45,6 milhões de pessoas possuem algum tipo de deficiência no Brasil. Destas, aproximadamente 5,5 milhões fazem uso constante da cadeira de rodas. Os cadeirantes enfrentam diversas adversidades nas atividades diárias tais como esforço excessivo durante a propulsão, dores e lesões nos membros superiores e dificuldades para subir e descer degraus sozinhos (van der Woude et al., 2001; Cooper et al., 1999).

Para mitigar algumas destas adversidades da utilização de cadeiras de rodas, soluções vêm sendo propostas, incluindo cadeiras com sistemas de propulsão alternativos à tradicional propulsão por meio de um aro acoplado diretamente à roda e cadeiras com propulsão manual assistida por motores elétricos, denominadas aqui cadeiras de rodas híbridas. Estas últimas não substituem a propulsão manual do cadeirante, mas o auxiliam, principalmente em rampas ou terrenos acidentados que impõem maior resistência ao rolamento como pavimentos complacentes tais como gramados e carpetes. Esta solução proporciona ao usuário benefícios cardiovasculares e músculo-esqueléticos provenientes do exercício atrelado à propulsão manual enquanto evitando sobrecargas aos membros superiores.

Uma das maiores dificuldades dos cadeirantes é a transposição de obstáculos como degraus, desníveis e rampas. Para realizar esta tarefa, os cadeirantes frequentemente empregam uma manobra denominada “*wheelie*” (do inglês) que consiste em empinar a cadeira de rodas para suspender as rodas dianteiras e equilibrar-se sobre as rodas traseiras (Kirby et al., 2001; Kirby et al., 2006). Esta tarefa é de difícil execução e requer bastante treino para seu aprendizado por envolver uma situação de equilíbrio instável que requer o controle contínuo e fino do cadeirante para evitar a queda. Muitos cadeirantes não são capazes de realizar esta tarefa satisfatoriamente o que pode levar a acidentes.

A atuação disponível nas cadeiras híbridas poderia proporcionar auxílio ao usuário durante esta tarefa para garantir o equilíbrio e evitar acidentes. No entanto, as cadeiras híbridas atualmente comercializadas auxiliam o cadeirante na tarefa de propulsão, mas ainda não são dotadas de funcionalidades para auxiliar o usuário a realizar o *wheelie*.

1.1. Objetivo

Neste contexto, o objetivo deste trabalho de iniciação científica é estudar a manobra *wheelie* por meio da modelagem e simulação computacional desta tarefa. Na primeira etapa do projeto, se propõe a investigação da influência de parâmetros como massa e localização do centro de massa sobre a estabilidade estática e dinâmica do sistema. Na segunda etapa, propõe-se a investigação de estratégias de controle do atuador de cadeiras híbridas de forma a garantir a estabilidade do sistema durante o *wheelie*.

2. Revisão Bibliográfica

2.1. Breve história da cadeira de rodas

Não há dúvidas que a roda é uma das invenções mais antiga e revolucionária nos tempos pré-históricos. Existe registro da sua primeira aparição na Mesopotâmia (Atual Iraque) a 4000 a.C.. Entretanto, o primeiro instrumento para transporte de pessoas deficientes ou doentes que ainda é usado nos dias atuais foi a maca, que poderia ser transportada pelos escravos daquela época. Existem algumas evidências da existência de macas com rodas naquela época; mas somente a aparição de um objeto similar a este foi registrado em um vaso representando uma cama de criança (Figura 1) no século VI a.C. na Grécia (Kamenetz, 1969).



Figure 1- Cama de criança ilustrada no vaso encontrado na Grécia.

Fonte: Silva e Del'acqua, 2005.

A aparição mais antiga de um modelo semelhante de uma cadeira com rodas foi encontrada na China aproximadamente em 525 d.C. esculpida em uma pedra. Ainda na China foi inventado o carrinho de mão que também era utilizado para carregar pessoas doentes em 300 d.C. que foi trazido para a Europa durante as cruzadas em 1200. O pintor renascentista alemão Lucas Cranach pintou uma obra (Figura 2) em 1546 que mostra um idoso sendo carregado por um carrinho de mão em direção à fonte da juventude localizado no canto esquerdo inferior do quadro.



Figure 2 - Cama de criança ilustrada no vaso encontrado na Grécia.

Fonte: Kamenetz, 1969.

Contudo, o veículo mais semelhante à cadeira de rodas atual foi criado em 1595 por Jehan Lhermite para o rei da Espanha, Filipe II (Cooper, 2007). Esta cadeira possuía quatro rodas, continha um estofamento de crina de cavalo e descanso de pé (Figura 3). Diferente das cadeiras de rodas manuais conhecidas atualmente, a cadeira do rei da Espanha era propulsionada por uma outra pessoa. Somente em 1655 um relojoeiro criou seu próprio veículo de transporte (Figura 4), mas parecido com um triciclo, que poderia ser propulsionado por ele mesmo. O mecanismo de

propulsão era uma manivela que aplicava uma força nas rodas através de manivelas (Kamenetz, 1969).



Figure 3- Rei Filipe II em sua cadeira.

Fonte: Silva e Del'acqua, 2005.

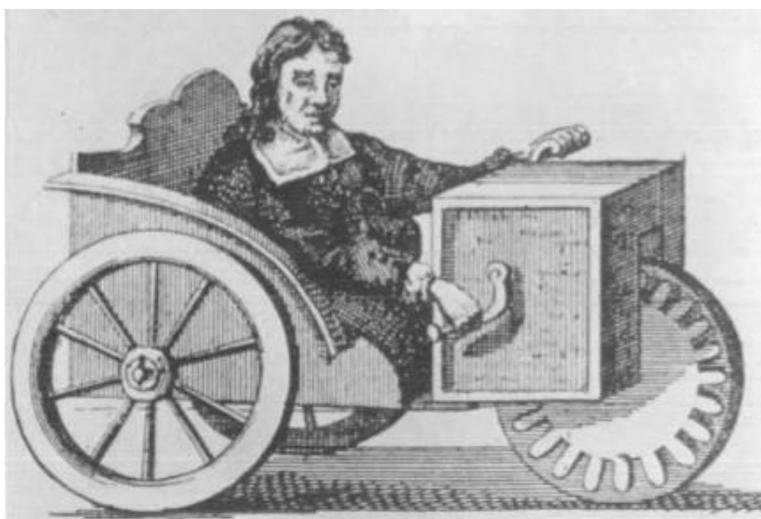


Figure 4 - Veículo fabricado por Stephan Farfler.

Fonte: Silva e Del'acqua, 2005.

Somente em 1669 foram implementadas duas rodas nas extremidades da cadeira (Figura 5), com finalidade de substituir os escravos. Esta versão é semelhante às cadeiras de rodas atuais, porém, no século XIX, foram substituídas as rodas de madeiras por rodas com aro de metal revestida com borracha por Harry Jennings.



Figure 5 – Cadeira de rodas elaborada por Harry Jennings.

Fonte: Silva e Del'acqua, 2005.

2.2. Identificação dos usuários de cadeiras de rodas

De maneira geral, os usuários de cadeiras de rodas são aqueles que não conseguem se locomover utilizando as suas pernas por diversas razões. Para aqueles que possuem os membros superiores saudáveis são capazes de usar as cadeiras de rodas manuais. Geralmente eles são usuários que sofreram alguma lesão ou tiveram doenças que acometem o sistema locomotor, como (Cooper, 2006):

- Lesão da medula espinhal;
- Espinha bífida;
- Esclerose múltipla;
- Amputação dos membros inferiores;
- Poliomielite;

- Artrite;
- Acidente vascular cerebral;
- Idade avançada;
- Doença cardiopulmonar.

2.3. Tipos de cadeira de rodas

Existem três configurações principais de cadeiras de rodas: cadeira de rodas com propulsão manual, motorizada e híbrida.

As cadeiras de rodas manuais, figura 6, têm vantagens sobre as outras tais como:

- Baixo custo em relação às cadeiras de rodas com propulsão automática e híbrida;
- Flexibilidade para transporte devido a sua estrutura mecânica;
- Atividades musculares dos membros superiores, que acarretam bem-estar do usuário e benefícios cardiovasculares e músculo-esqueléticos;

Entretanto, esta cadeira pode acarretar danos aos usuários devido aos grandes esforços em ambientes adversos tais como aclives, declives e terrenos acidentados ou complacentes como gramados e carpetes.



Figure 6 - Cadeira de Rodas Manual.

Fonte: <http://valinhoshomecare.com.br>

As cadeiras de rodas motorizadas, figura 7, são uma solução para as pessoas que não podem conduzir cadeiras de rodas manuais, como usuários que sofrem de paralisia cerebral ou com lesão medular alta como tetraplégicos. Mesmo com a facilidade de conduzir uma cadeira motorizada, existem barreiras em utilizar esta cadeira em certos ambientes, devido ao seu peso e dimensões maiores. Esta cadeira também estimula o sedentarismo do usuário, de forma que esta solução deve ser evitada sempre que possível.



Figure 7 - Cadeira de Rodas Motorizada.

Fonte: <http://www.cirurgicaastmed.com.br>

Para aumentar a atividade física dos cadeirantes em relação às cadeiras com propulsão motora e reduzir o número e risco de lesões provocadas pelo excesso de esforço físico e sobrecarga articular, surgiu a cadeira de rodas híbrida. Estas cadeiras, figura 8, são dotadas de motores acoplados às próprias rodas ou a uma quinta roda.



Figure 8 - Cadeira de Rodas Manual.

Fonte: Alber, 2013.

Existem três fatores que determinam o desempenho do usuário da cadeira de rodas, conhecido popularmente, por cadeirante:

- Usuário – O cadeirante tem a tarefa de propulsionar a cadeira de rodas através da força aplicada ao aro da roda enquanto segura a mesma e empurra gerando movimento, no caso de cadeiras de rodas com propulsão manual;
- Cadeira de rodas – A qualidade da cadeira de rodas também influencia na performance do usuário;
- Técnica – O usuário da cadeira de rodas deve possuir uma técnica de propulsão para que aproveite ao máximo o esforço muscular para gerar propulsão da cadeira.

A combinação do usuário e da cadeira de rodas pode ser representado com um diagrama de corpo livre podendo se mover com certa velocidade e exposto a forças externas, tais como: resistência do ar, resistência ao rolamento, resistência através do atrito de peças internas e componente da força peso quando a cadeira de rodas se encontra em um plano inclinado.

Cada parte do corpo humano tem sua respectiva função para efetuar tarefas rotineiras. O usuário utiliza os membros superiores para se locomover a partir do uso da cadeira de rodas manual. Entretanto, esta parte do corpo humano não é adaptada para realizar esta atividade.

Os pesquisadores de cadeiras de rodas utilizam três estratégias principais para estudar assuntos em geral ligados a propulsão, tais como:

- Experimento com a cadeira de rodas em um percurso com a roda instrumentada com *strain gauge*, capaz de avaliar as forças aplicadas ao aro;
- Análise muscular do usuário e cinemática de cadeiras de rodas instrumentadas em cima de uma esteira;
- Por último, ensaio de um simulador de cadeiras de rodas padronizado e com regulagem básica para cada indivíduo.

2.4. “Wheelie” (Empinar)

“Wheelie” ou empinar a cadeira de rodas, figura 9, é uma habilidade que o cadeirante deve desenvolver para poder ultrapassar obstáculos e até mesmo poder descansar no encosto de uma parede ou fazer uma manobra em um espaço reduzido (Kirby et al., 2001; Kirby et al., 2006).



Figure 9 - Execução do “Wheelie”.

Fonte: Denison, 2013.

Para execução desta tarefa, é necessária habilidade para manter a cadeira estável com as rodas dianteiras suspensas já que se trata de uma condição de equilíbrio instável, comparável ao pêndulo invertido. A falta de habilidade pode ocasionar sérios acidentes e limitar a locomoção do usuário. Na figura 10, é possível notar a importância do *wheelie*.



Figure 10 - Execução do *wheelie* para subir em uma prancha.

Fonte: Denison, 2013.

2.5. Modelagem do “*Wheelie*”

Para executar o “*wheelie*” é necessário desenvolver um modelo do sistema. Para que o usuário e a cadeira encontrem o equilíbrio, é necessário que o centro de gravidade do sistema (usuário + cadeira de rodas) esteja na mesma linha vertical que o centro do eixo da roda traseira (Denison, 2013).

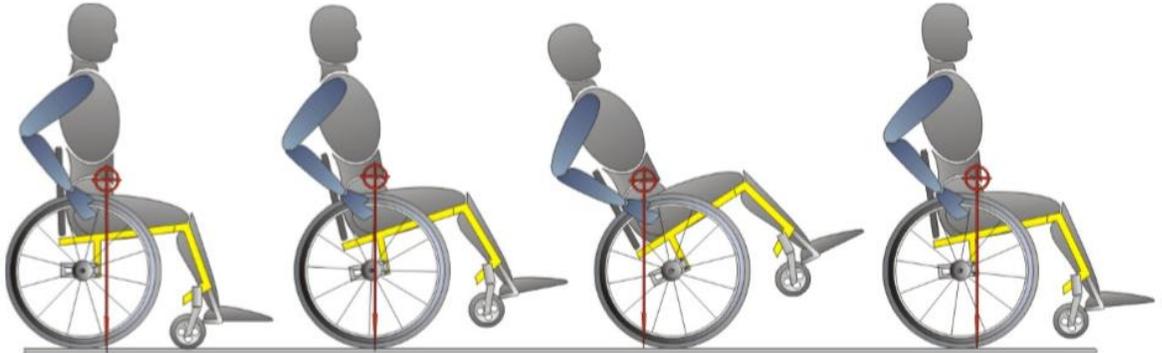


Figure 11- Relação do centro de gravidade com o eixo da roda.

Fonte: Denison, 2013.

Na figura 11, a primeira situação descreve a cadeira com todas as rodas em contato com o chão. Neste caso, o sistema possui um grau de liberdade (1 DOF, do termo em inglês “*Degree of freedom*”, desprezando-se a deflexão dos pneus, a complacência da estrutura e o escorregamento das rodas. Neste caso, se a cadeira estiver em repouso ou com velocidade constante, garante-se o equilíbrio estático já que a projeção do CG sobre o solo encontra-se entre os pontos de contato das rodas traseiras e dianteiras, figura 12.

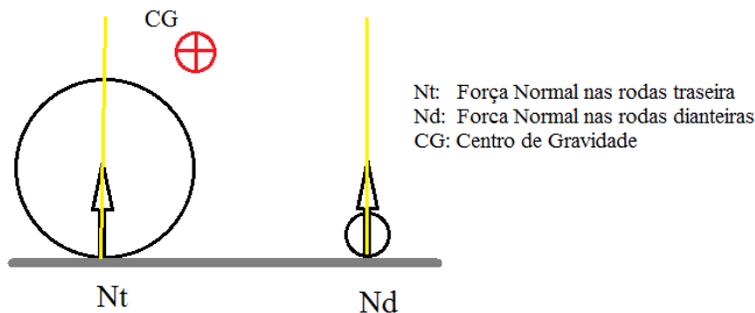


Figure 12 - CG do sistema e forças normais nas rodas.

Fonte: Autor.

Na segunda situação da figura 11, o centro de gravidade encontra-se na mesma linha vertical que o eixo da roda, o que representa uma condição de equilíbrio estático instável do sistema. Qualquer perturbação do sistema sem ação corretiva do usuário, o fará divergir da posição de equilíbrio. As outras duas situações não correspondem a condições de equilíbrio estático, pois o centro de gravidade não se encontra na mesma reta vertical que o eixo da roda. Nas condições 2 a 4 da figura 11, o sistema apresenta dois graus de liberdade já que a roda dianteira se encontra suspensa (Kauzlarich et al., 1986).

2.6. *Wheelie* com as cadeiras de rodas híbridas

Como já identificado, as cadeiras de rodas híbridas possuem geralmente dois motores nos eixos das rodas traseiras para auxiliar o usuário durante a locomoção, figura 8. Estas cadeiras possibilitam redução da intensidade de propulsão do usuário por meio da aplicação de torque nas rodas pelos motores. A presença dos motores nas cadeiras de rodas híbridas poderia teoricamente auxiliar o usuário tanto na iniciação da tarefa do *wheelie* em que a cadeira é efetivamente empinada e/ou na manutenção do equilíbrio após a região de equilíbrio instável ter sido atingida. De acordo com o conhecimento deste autor, não há atualmente produtos comerciais que ofereçam esta funcionalidade.

3. Projeto

3.1. Modelagem da Cadeira de Rodas

Para melhorar a performance da cadeira de rodas ou adicionar novas funcionalidades, por exemplo, a tarefa de empinar proposta por este projeto de iniciação científica, é necessário conhecer as propriedades mecânicas do sistema. Entretanto, não podemos esquecer que devemos adicionar o efeito do usuário sobre a cadeira de rodas (Van der Woude, 2001).

O cadeirante deve aplicar um impulso com uma potência superior àquela necessária para movimentar a cadeira de rodas. As forças que oferecem resistência ao movimento são principalmente as seguintes:

- Resistência ao rolamento;
- Resistência do ar;
- Inclinação do terreno;
- Atrito interno.

Portanto, para que o usuário consiga de acelerar a cadeira de rodas, é necessário que ele aplique uma força superior às forças de oposição ao deslocamento. Esta força aplicada no sistema resulta uma aceleração que pode influenciar na estabilização do sistema. Quando a aceleração é inferior ao ponto de iminência ao tombamento o sistema possui um grau de liberdade, logo as quatro rodas estão apoiadas no chão. Caso o sistema fique instável, ou seja, caso ocorra o empinamento e a cadeira de rodas fique apenas com as duas rodas traseiras no chão o sistema possui dois graus de liberdade.

Para encontrar o modelo dinâmico do sistema, dividimos a cadeira de roda em três corpos rígidos, cujos diagramas de corpo livre são ilustrados na figura 13.

3.1.1. Modelo dinâmico com 1 grau de liberdade

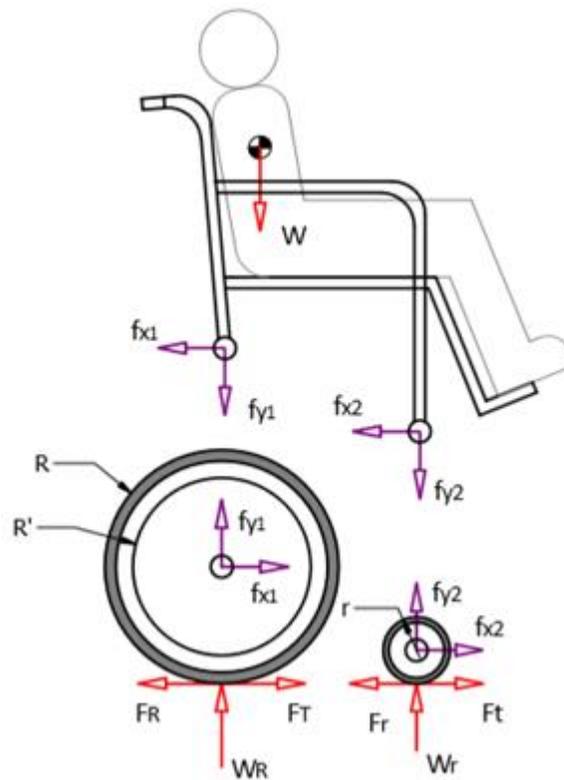


Figure 13 – Diagrama de corpo livre para o sistema om 1 DOF

Fonte: Autor

Aplicando o teorema do movimento do baricentro a todo o sistema, temos:

$$M \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext}, \quad (1)$$

onde M é a massa total do sistema, \vec{a} é a aceleração, e F_i são as forças atuantes no sistema

No eixo x:

$$F_T + F_t = M \cdot \dot{v}, \quad (2)$$

onde \dot{v} é a aceleração, F_T e F_t são as forças de tração das rodas traseira e dianteira respectivamente.

No eixo y:

$$W_R + W_r = W \quad e \quad (3)$$

$$W = M \cdot g, \quad (4)$$

onde W_R e W_r são as forças normais das rodas traseira e dianteira, W a soma dessas forças, e g a aceleração gravitacional.

Aplicando o teorema do momento angular (equação 5) para cada corpo do modelo, temos:

$$m(G - O) \wedge \vec{a}_0 + \frac{d}{dt} ([\vec{i} \vec{j} \vec{k}] J_0 \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}) = \vec{M}^{ext}, \quad (5)$$

onde m é a massa, a é aceleração, J_0 é o momento de inercia, W a velocidade angular e M o momento.

Aplicando a equação 3 na roda traseira, temos:

$$J_R \cdot \ddot{\theta} = \tau - F_T \cdot R - \tau_R, \quad (6)$$

onde J_R é o momento de inercia, $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular, τ_R é o momento gerado pela força resistiva ao rolamento, τ é o momento gerado pela força aplicada pelo usuário, e R o raio da roda traseira.

O ângulo correspondente ao deslocamento angular da roda é a razão entre o deslocamento e o raio da roda:

$$\theta = \frac{x}{R}. \quad (7)$$

Logo, derivando esta expressão em função do tempo, temos a velocidade angular e também podemos obter a aceleração angular (equação 8) a partir de outra derivada em função do tempo

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{v}}{R}. \quad (8)$$

Podemos obter o momento ou torque provocado pelas forças atuantes na roda traseira de acordo com a seguinte relação:

$$\tau = F \cdot R' \quad e \quad (9)$$

$$\tau_R = F_R \cdot R , \quad (10)$$

onde F é a força aplicada pelo usuário, F_R é a força resultante da resistência ao rolamento na roda traseira, e R' é o raio do aro propulsor.

Substituindo as equações (4), (5) e (6) na equação (3), temos,

$$J_R \cdot \frac{\dot{v}}{R^2} = \frac{F \cdot R'}{R} - F_T - F_R . \quad (11)$$

Para a roda dianteira, temos:

$$J_r \cdot \ddot{\alpha} = -F_t \cdot r - \tau_r . \quad (12)$$

Sabendo que o ângulo é a razão do deslocamento com o raio da roda dianteira:

$$\alpha = \frac{x}{R} . \quad (13)$$

Logo, derivando esta expressão em função do tempo, temos a velocidade angular e também podemos obter a aceleração angular a partir de outra derivada em função do tempo.

$$\ddot{\alpha} = \frac{\dot{v}}{R} . \quad (14)$$

Podemos obter o momento ou torque provocado através da força atuante na roda traseira de dianteira:

$$\tau_r = F_r \cdot r . \quad (15)$$

Portanto:

$$J_r \cdot \frac{\dot{v}}{r^2} = -F_t - F_r . \quad (17)$$

Substituindo as equações (8) e (11) na equação (2).

$$F \left(\frac{R'}{R} \right) = \left(M + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{r^2} \right) \cdot \dot{v} + F_R + F_r \quad (19)$$

Portanto, a equação (19) corresponde ao **modelo dinâmico do sistema de 1 grau de liberdade**.

3.1.2. Modelo dinâmico com 2 graus de liberdade

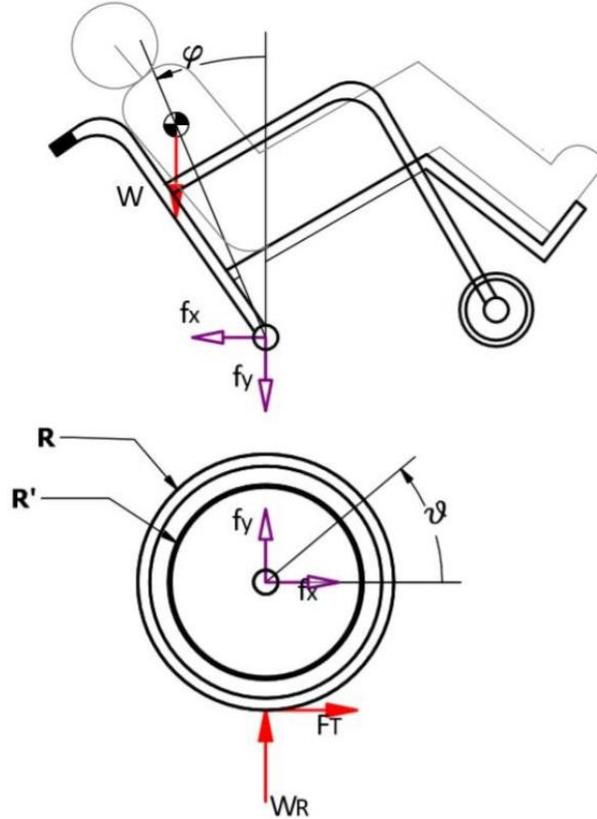


Figure 14 - Diagrama de corpo livre para o sistema om 2 DOF

Fonte: Autor

Aplicando o teorema do movimento do baricentro na roda da Figura 14, temos:

$$M_r \cdot \ddot{x} = F_t - f_x, \quad (21)$$

onde M é a massa total do sistema, \ddot{x} é a aceleração, F_t é a força de tração, e f_x é a força interna do sistema, lembrando que ela também age com intensidade oposta na cadeira de rodas.

Aplicando o Teorema do Momento Angular na roda, temos:

$$J_R \cdot \ddot{\theta} = \tau - F_t \cdot R - \tau_R \quad (22)$$

$$J_R \cdot \ddot{\theta} = \tau - F_t \cdot R - F_R \cdot R \quad (23)$$

Portanto,

(24)

$$F_t = \frac{-J_R \cdot \ddot{\theta} + \tau + F_R \cdot R}{R}$$

Substituindo a equação (24) na equação (21), temos:

$$f_x = \frac{-J_R \cdot \ddot{\theta} + \tau + F_R \cdot R + M_r \cdot \ddot{x} \cdot R}{R} \quad (25)$$

Sabendo que a posição do centro de gravidade da cadeira de rodas corresponde a seguinte equação:

$$\overline{CG} = (x)_i + (l \cdot \sin \varphi)_i + (l \cdot \cos \varphi)_j \quad (26)$$

Derivando a equação (26) obtemos respectivamente a velocidade e aceleração do centro de massa:

$$\dot{\overline{CG}} = (\dot{x})_i + (l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi)_i - (l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi)_j \quad (27)$$

$$\ddot{\overline{CG}} = (\ddot{x} + l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi)_i + (-l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi - l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi)_j \quad (28)$$

Aplicando o TMB na cadeira, resulta em:

$$M_c \cdot \ddot{\overline{CG}}_i = f_x \quad (29)$$

Aplicando o TMA, temos.

$$J_c \cdot \ddot{\varphi} = -\tau - f_y \cdot l \cdot \sin \varphi + f_x \cdot l \cdot \cos \varphi \quad (30)$$

$$-f_y \cdot \sin \varphi + f_x \cdot \cos \varphi = -\left(\frac{J_c \cdot \ddot{\varphi} + \tau}{l}\right) \quad (31)$$

Substituindo a equação (28) na equação (29),

$$M_c \cdot (\ddot{x} + l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi) = f_x \quad (32)$$

Igualando as equações (25), (32) e sabendo da seguinte relação:

$$\ddot{x} = \ddot{\theta} \cdot R \quad (33)$$

Temos a primeira equação do **modelo dinâmico do sistema de 2 graus de liberdade**,

$$[J_R + (M_r + M_c)R^2] \cdot \ddot{\theta} + (M_c R l \cos \varphi) \cdot \ddot{\varphi} - M_c R l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \tau - F_R R \quad (34)$$

Aplicando TMB na direção perpendicular entre o CG e o raio de giração, obtemos:

$$-f_y \cdot \sin \varphi + f_x \cdot \cos \varphi + M_c \cdot g \cdot \sin \varphi = M_c \cdot \ddot{x} \cdot \cos \varphi + M_c \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \quad (35)$$

Substituindo a equação (30) na equação (35), resulta em:

$$-\frac{J_c \cdot \ddot{\varphi} + \tau}{l} = M_c \cdot (\ddot{x} \cdot \cos \varphi + l \cdot \ddot{\varphi} - g \cdot \sin \varphi)$$

(36)

$$-J_c \cdot \ddot{\varphi} - \tau = M_c \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{x} + M_c \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} - M_c \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi \quad (37)$$

Substituindo a equação (33) em (37), temos a segunda equação do **modelo dinâmico do sistema de 2 graus de liberdade**:

$$(M_c \cdot l \cdot R \cdot \cos \varphi) \cdot \ddot{\theta} + (J_c + M_c \cdot l^2) \cdot \ddot{\varphi} - M_c \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi = -\tau \quad (38)$$

Portanto, o modelo dinâmico que rege o sistema corresponde as seguintes equações:

$$\begin{aligned} [J_R + (M_r + M_c) \cdot R^2] \cdot \ddot{\theta} + (M_c \cdot R \cdot l \cdot \cos \varphi) \cdot \ddot{\varphi} - M_c \cdot R \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi &= \tau - F_R \cdot R \\ (M_c \cdot l \cdot R \cdot \cos \varphi) \cdot \ddot{\theta} + (J_c + M_c \cdot l^2) \cdot \ddot{\varphi} - M_c \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi &= -\tau \end{aligned}$$

3.1.2.1. Linearização do sistema

Para projetar um controlador por determinadas técnicas de controla, é necessário que o sistema seja linear. Portanto, para linearizar o modelo dinâmico do sistema anterior, fazemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \alpha) &\approx 1 \\ \sin(\varphi + \alpha) &\approx \varphi \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

Isso apenas acontece devido ao fato do erro previsto α do sistema é muito pequeno e a velocidade $\dot{\varphi}$ é praticamente nula. Portanto temos:

$$\begin{aligned} [J_R + (M_r + M_c) \cdot R^2] \cdot \ddot{\theta} + (M_c \cdot R \cdot l) \cdot \ddot{\varphi} &= \tau - F_R \cdot R \\ (M_c \cdot l \cdot R \cdot \cos \varphi) \cdot \ddot{\theta} + (J_c + M_c \cdot l^2) \cdot \ddot{\varphi} - M_c \cdot g \cdot l \cdot \varphi &= \tau \end{aligned}$$

3.1.3. Transição do estado com 1 grau para 2 graus de liberdade

Para estudar o sistema completo para realizar o *wheeling*, é necessário conhecer todas as fases do sistema; inclusive a fase de transição do sistema estável, quando ele está com todas rodas apoiadas no chão, até o sistema sobre duas rodas.

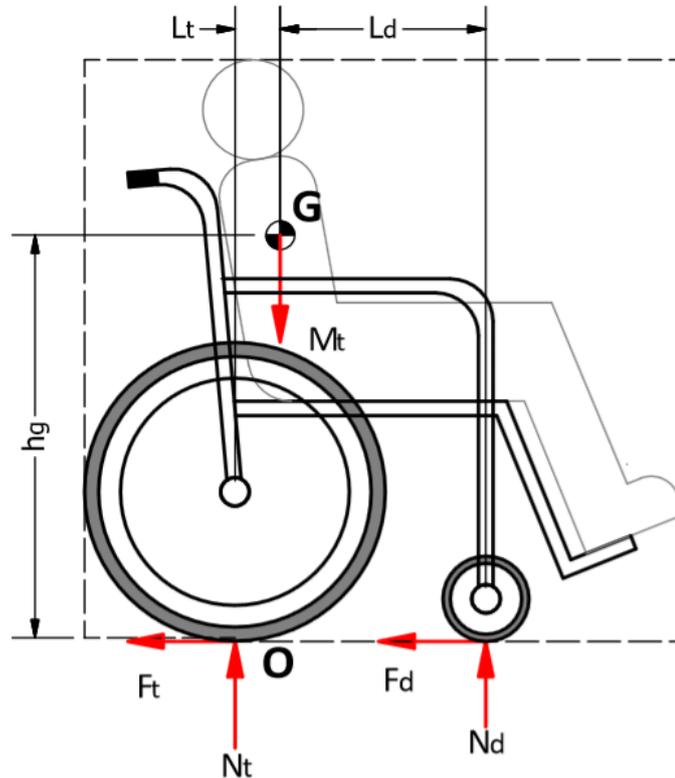


Figure 15 – Sistema Cadeira de Rodas + Usuário como um único bloco

Fonte: Autor.

Portanto, através do sistema da figura 15, devemos aplicar o teorema do momento angular, que resulta em:

$$M \cdot (G - O) \vec{a}_O = \sum M_O \quad (39)$$

Como o sistema apenas translada e não rotacional, a derivada da velocidade é nula, logo temos:

$$M \cdot \{(L_T)_i + (h_G)_j\} \times \dot{v}_i = -M \cdot g \cdot (L_T)_k + N_d(L)_j \quad (40)$$

Isolando a aceleração, temos a seguinte expressão:

$$\dot{v} = \frac{M \cdot g \cdot L_T - N_d L}{M \cdot h_G} \quad (41)$$

Para a eminência da transição temos a força normal da roda dianteira nula, logo a aceleração neste instante corresponde a:

$$\dot{v} = \frac{g \cdot L_T}{h_G} \quad (42)$$

3.1.4. Resistência ao Rolamento

Resistência ao rolamento é a principal força resistiva ao deslocamento da cadeira de rodas (Van der Woude, 2001). Ela surge a partir da dissipação de energia durante a rotação de um corpo em uma superfície. Geralmente, é causada por um efeito não elástico.

Cossalter (2006) afirma que a força resistiva depende da carga aplicada sobre o pneu, rigidez radial, pressão de inflação (calibragem), velocidade radial e temperatura do pneu. Na figura 14 a parte mais escura ilustra a deformação de um pneu qualquer, relacionada à energia dissipada. O principal fenômeno relacionado a esta dissipação de energia é a histerese do material do pneu durante sua deformação.

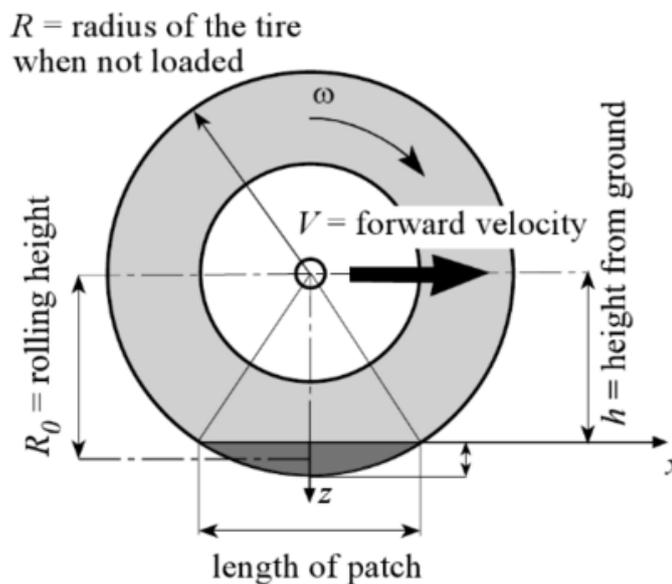


Figure 16 – Efeito da resistência ao rolamento no pneu

Fonte: Cossalter, 2006.

A histerese causa uma assimetria na distribuição das tensões normais ao longo da superfície de contato entre o pneu e o pavimento. As tensões normais serão maiores no lado do eixo correspondente ao sentido de velocidade, veja a figura 15. Portanto, a força resistiva ao rolamento surge em oposição à velocidade.

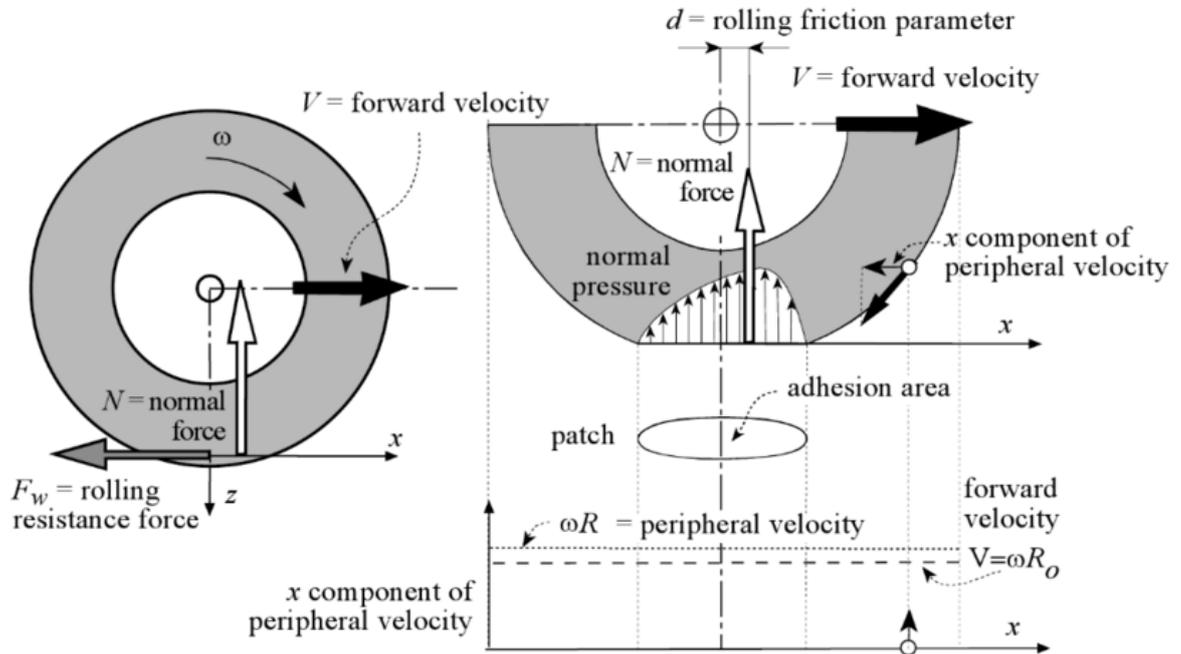


Figure 17 – Ilustração da resistência ao rolamento e a distribuição de tensões normais na superfície de contato.

Fonte: Cossalter, 2006.

A força resistiva ao rolamento pode ser determinada pelo produto de um coeficiente de resistência ao rolamento pela força normal. Este coeficiente pode ser calculado através da razão entre o coeficiente de fricção d e o raio da roda R (Van der Woude, 2001).

$$F_w = f_w N = \frac{d}{R} N \quad (43)$$

Para pneus automobilístico, existem testes normalizados por entidades confiáveis para determinar o coeficiente de resistência ao rolamento, como a SAE (*Society of Automotive Engineers*) ou ISO (*International Organization for Standardization*): ISO 18164:2005, SAE J1269 e SAE J2452. Ambas entidades realizam os testes em condições realistas de uso.

Para os pneus de cadeira de rodas, não existe um teste normalizado para determinar o coeficiente de resistência ao rolamento. Por isso, muitos pesquisadores realizam seus próprios testes para determinar este coeficiente. Este coeficiente pode ser determinado a partir da medição da força aplicada à cadeira de rodas sobre diversos tipos de superfície (Van der

Woude, 2001). Também pode ser medido através de uma célula de carga sobre uma esteira (Gordon, 1989).

Van der Woude (2001) compilou uma lista de fatores que afetam a força de resistência ao rolamento, Tabela 1.

Characteristics	Effect on rolling friction
Body mass ↑	↑
Wheelchair mass ↑	↑
Tyre pressure ↓	↑
Wheel size ↑	↓
Hardness floor ↓	↑
Camber angle ↑	?
Toe-in/out ↑	↑↑
Castor shimmy ↑	↑
Center of mass over large rear wheels	↓
Folding frame (vs box frame)	↑
Maintenance ↓	↑

Tabela 1 – Influências de diferentes características sobre a resistência ao rolamento.

Fonte: (Van der Woude et al, 2001).

3.1.5. Resistência aerodinâmica

A resistência do ar ou resistência aerodinâmica é a força que se opõe à velocidade do corpo relativa ao ar. Apesar de esta força ser desprezável para baixas velocidades, van der Woude (2001) afirma que esta é o segundo fator mais importante responsável pela dissipação de energia em altas velocidades (Van der Woude, 2001). Entretanto, apenas atletas são capazes de atingir velocidades equivalentes de 5 a 10 m/s . Para calcular esta força, utilizamos a seguinte equação (44).

$$F_{air} = \frac{1}{2} D (V_w - V_1)^2 A \cdot C_D, \quad (44)$$

Onde D é a densidade do ar ($D = 1,23 \text{ kgm}^{-3}$), V_w é a velocidade da cadeira de rodas, V_1 é a velocidade do vento, A é a área frontal da cadeira de rodas e usuário e C_D é o coeficiente de resistência aerodinâmica ou coeficiente de arrasto

O coeficiente de arrasto para cadeira de rodas convencionais corresponde a aproximadamente 0,96. Com a adição do usuário este valor foi de 1,40 (Hofstad et al, 1994). Como visto na equação anterior, a geometria frontal da cadeira de rodas tem uma importância

significativa para a força, assim como a sua velocidade. No nosso estudo, a cadeira de roda estudada é a convencional. As únicas cadeiras de rodas capazes de alcançar uma velocidade significativa do ponto de vista da força de arrasto são as cadeiras de rodas modificadas para corridas. De acordo com van der Woude (2001), para as velocidades típicas de aproximadamente 1 m/s a força de arrasto será equivalente será de apenas em torno de 1 N ; porém, quando esta velocidade alcança os 5 m/s , esta força é elevada para valores na casa dos 14 N (Van der Woude, 2001).

3.1.6. Cálculo do momento de inércia

Antes de iniciar a modelagem dinâmica da cadeira de rodas, é necessário dividi-la em partes com o objetivo de simplificar o sistema:

- Estrutura principal da cadeira de rodas;
- Rodas traseira e dianteira;
- Usuário.

Para cada divisão do sistema temos diferentes propriedades, como massa, centro de massa, momento de inércia.

Momento de inércia (J) é a grandeza física que está relacionada com a dificuldade impor uma aceleração angular a um corpo. Ela é uma grandeza que descreve a distribuição de massa de um corpo em torno de seu eixo de rotação. A unidade de medida do momento de inércia é

$$[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 . \quad (45)$$

O momento de inércia de um corpo em relação a um determinado eixo pode ser calculado através da seguinte expressão

$$J = \int_C r^2 \cdot dm , \quad (46)$$

onde dm é a massa de um elemento infinitesimal situado a uma distância r do eixo em questão.

Para corpos com geometria e massa bem conhecidos é possível explorar as equações anteriores e determinar o momento de inércia através de cálculos numéricos ou mesmo programas computais; por exemplo programas de CAD (*Computer-Aided Design*). Entretanto, para os corpos com geometrias mais complexas, formado por diversos materiais com

diferentes densidades é necessário realizar experimentos práticos para a determinação desta quantidade.

O momento de inércia pode ser medido por testes dinâmicos. O corpo em estudo é colocado em movimento e a partir de determinados parâmetros é possível extrair esta grandeza física. Quando o corpo é colocado em rotação, podemos obter um movimento periódico ou não periódicos. Um movimento não periódico do objeto em estudo permite a extração do momento de inércia através da medição da aceleração (*acceleration*) angular do mesmo. Um movimento periódico permite a estimativa do momento de inércia através do período de oscilação (*Oscillation*) do corpo (Genta and Delprete, 1992). Portanto, podemos classificar os experimentos de acordo com a Figura 16.

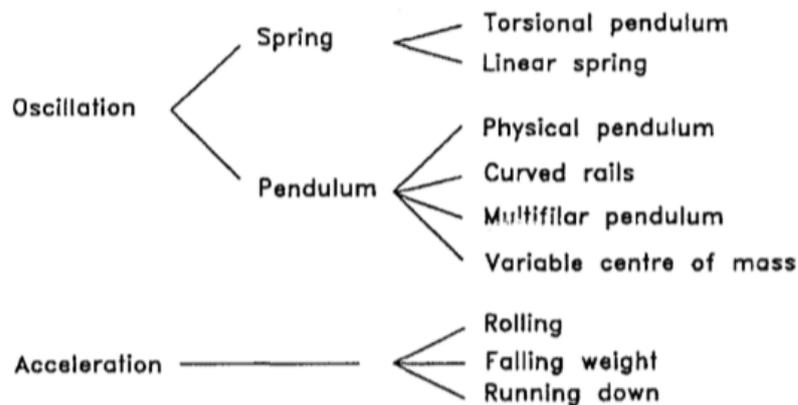


Figure 18 – Classificação dos métodos para obter o momento de inércia.

Fonte: Genta and Delprete, 1992.

Os métodos experimentais de oscilação são superiores aos testes de aceleração devido à facilidade e flexibilidade para realização do experimento, obtendo-se um erro muito pequeno. Os experimentos mais utilizados para determinar o momento de inércia de um corpo qualquer são aqueles baseados em pêndulos de torção (*Torsional pendulum*) e pêndulos multifilares (*Multifilar pendulum*).

3.1.7. Pêndulo Físico

O pendulo físico é composto por um corpo suspenso em um campo gravitacional que oscila em torno de seu eixo de rotação. Na figura 17, temos à esquerda um corpo de massa m

suspenso por uma corda partindo do repouso com um ângulo inicial φ . Na mesma figura temos uma roda articulada em seu eixo, à qual é afixado um corpo de massa conhecida. A roda parte também do repouso com ângulo φ .

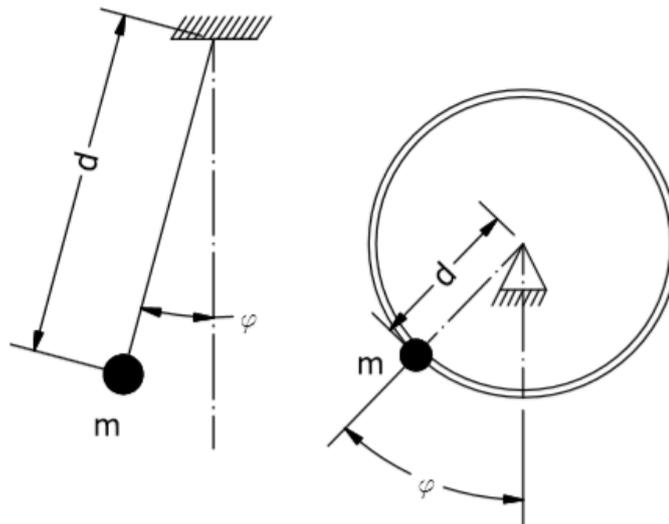


Figure 19 – Pêndulo físico

Fonte: Autor.

Podemos relacionar o momento resultante τ do corpo suspenso através do produto do momento de inércia total do sistema em relação ao eixo de rotação J pela aceleração angular α :

$$\tau = J \cdot \alpha , \quad (47)$$

Onde:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} . \quad (48)$$

Através da figura 17, podemos determinar o momento da força peso em relação ao eixo de rotação,

$$\tau = -mgd \cdot \sin \theta , \quad (49)$$

onde g é a aceleração gravitacional, d é a distância entre o corpo e o centro de rotação, e θ o ângulo como ilustrado na figura 17.

Substituindo as equações (16) e (17) na equação (15), temos:

$$-mgd \cdot \sin \theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2} . \quad (50)$$

Resultando na seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd \cdot \sin \theta}{J} = 0 . \quad (51)$$

Podemos fazer uma simplificação de $\sin \theta = \theta$ para pequenos ângulos. Veja alguns valores na Tabela 2 que evidenciam a qualidade da aproximação para ângulos pequenos.

θ (°)	θ (rad)	sen (θ)
-5	-0.0873	-0.0872
-4	-0.0698	-0.0698
-3	-0.0524	-0.0523
-2	-0.0349	-0.0349
-1	-0.0175	-0.0175
0	0.0000	0.0000
1	0.0175	0.0175
2	0.0349	0.0349
3	0.0524	0.0523
4	0.0698	0.0698
5	0.0873	0.0872

Tabela 2 – Valores do seno para pequenos ângulos

Fonte: Autor.

Resolvendo a equação homogênea e linear anterior, obtemos as seguintes expressões para o período de oscilação para o pêndulo simples:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} , \quad (52)$$

onde T é o período de oscilação.

Para determinar o momento de inércia da roda traseira foi adicionada uma massa com dimensões e massa conhecidas na extremidade da roda. Através da análise da oscilação é possível estimar o momento de inercia. Portanto, podemos encontrar este valor de acordo com as seguintes expressões:

$$J = J_R + md^2 \quad (53)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_R + mL^2}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_R}{mgd} + \frac{L^2}{gd}} \quad (54)$$

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{J_R}{mgd} + \frac{d^2}{gd} \quad (55)$$

$$J_R = \left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{d}{g}\right) mgd = \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - d\right) md, \quad (56)$$

onde J_R é o momento de inércia da roda traseira, T é o período, d é a distância entre o corpo e o centro da roda, m é a massa do corpo, e g é a aceleração da gravidade.

Portanto, conhecendo a massa do corpo m , a distância entre ele e o eixo de rotação d e o período de oscilação, podemos determinar o momento de inércia da roda.

3.1.8. Centro de Massa (CM)

Conhecer a posição geométrica do centro de massa é importante para determinação de diversos parâmetros do sistema. Para isso, pesquisadores utilizam técnicas computacionais, experimentos ou cálculos para determinar esta grandeza. Para sistemas que consistem de geometrias e massas conhecidas, podem ser facilmente calculados através da distribuição de massa ao longo de suas dimensões ou através de softwares de desenho como AutoCAD e Inventor. Entretanto, para sistema com geometrias complexas e massas variáveis se tornam mais trabalhoso. Para contornar esta situação podemos realizar experimentos que não demandam o conhecimento das medidas geométricas e massa do sistema.

Quando um material de formato e massa qualquer é fixado e suspenso em apenas um ponto, o centro de massa deste corpo permanece alinhado ao eixo vertical como ilustrado na figura 20. Portanto, suspendendo este mesmo material em diversos pontos e fazendo a intersecção desses eixos criados, podemos obter o centro de massa do sistema.

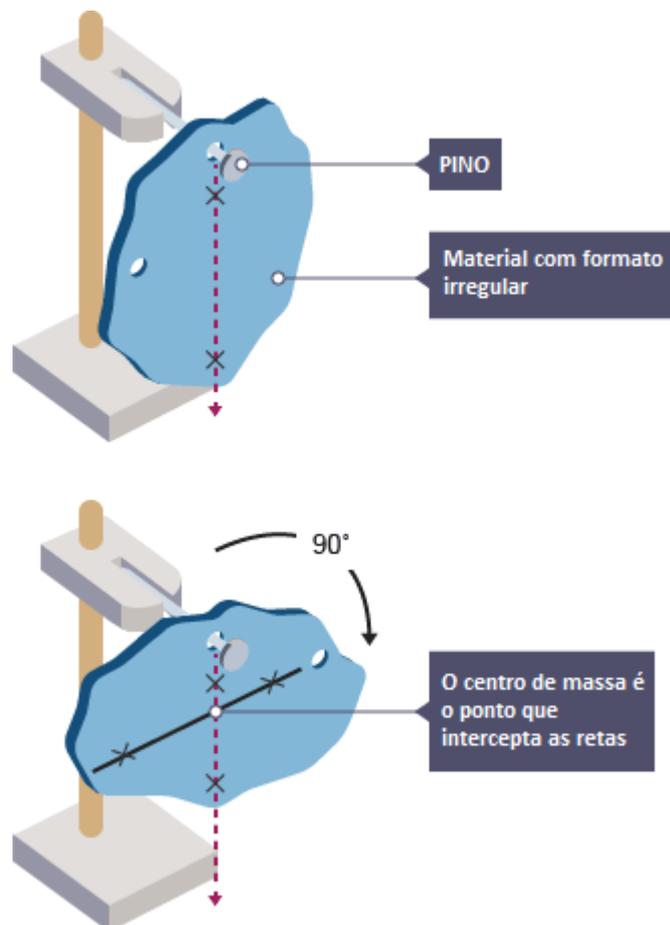


Figure 20 – Representação do experimento para determinar o centro de massa

3.2. Controle

O objetivo principal deste trabalho foi o levantamento dos parâmetros físicos da cadeira de rodas para realizar a tarefa de empinar. Entretanto, para dar continuidade no trabalho foi proposto um controlador baseado na lei de controle a seguir:

$$\tau = -k \cdot x \quad (57)$$

E para resolver esta lei de controle, foi utilizado a regulação linear quadrática.

Na figura 21 está ilustrado a lei de controle, onde o vetor de estado x corresponde a:

$$x = [\varphi \quad \dot{\varphi} \quad \dot{\theta}] \quad (58)$$

Onde, φ representa o ângulo da cadeira de rodas, $\dot{\varphi}$ é a velocidade angular da cadeira de rodas em torno do eixo traseiro, e $\dot{\theta}$ é a velocidade angular da roda traseira.

O vetor referência x_r corresponde a:

$$x_r = [\varphi_r \quad \dot{\varphi}_r \quad \dot{\theta}_r] \quad (59)$$

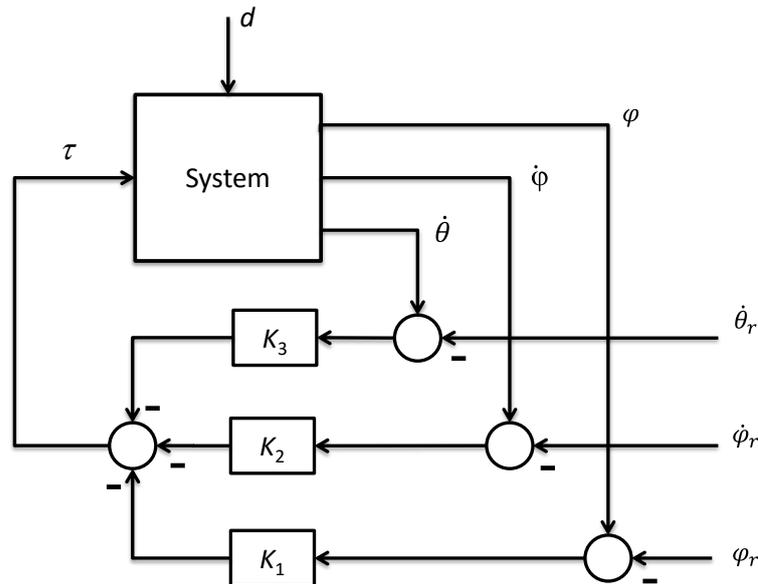


Figure 21 – Realimentação de estado

Fonte: Autor

A lei de controle utilizada tende a ter boas propriedades, pois é considerado que a dinâmica do modelo linearizado é aproximadamente igual ao modelo não linear. Também, confere-se ao regulador linear:

- Elevada margem de ganho e margem de fase, que, em geral, implica em excelente robustez do sistema à estabilidade.
- Tolerância aos erros de calibração do sensor do ângulo φ

3.3.Procedimento Experimental

3.3.1. Centro de Massa da Cadeira de Rodas

Para determinar o centro de massa da cadeira de rodas foi utilizado a técnica de suspensão. Com o auxílio de uma corda e uma estrutura rígida foi possível erguer a cadeira de rodas. Foi realizado a suspensão por três pontos diferentes para garantir a posição correta do centro de massa.

Veja na figura 29 que foi utilizado um plumo para marcar a linha vertical que passa pelo centro de massa. Logo, com a análise das imagens foi feito a intersecção entre essas retas. Na Figura 28, representa as intersecções entre as retas obtidas. Note que o valor das cotas não possui unidade de medida; pois, elas correspondem ao número de pixels das fotos. Na figura 20, temos as três retas plotadas uma sobre a outra para determinar o centro de massa.



Figure 22 – Experimento para obter centro de massa da cadeira de rodas.

Fonte: Autor

Veja na figura 23 que existe uma diferença pequena entre as intersecções. Como esta diferença corresponde cerca de 1 cm podemos considerar uma diferença insignificativa pois levando em conta a adição do usuário cujo centro de massa também não é preciso e ainda temos que levar em conta.

Logo, o experimento resultou a posição do centro de massa na seguinte coordenada geométrica em relação ao eixo traseiro: 58 e 249 mm.

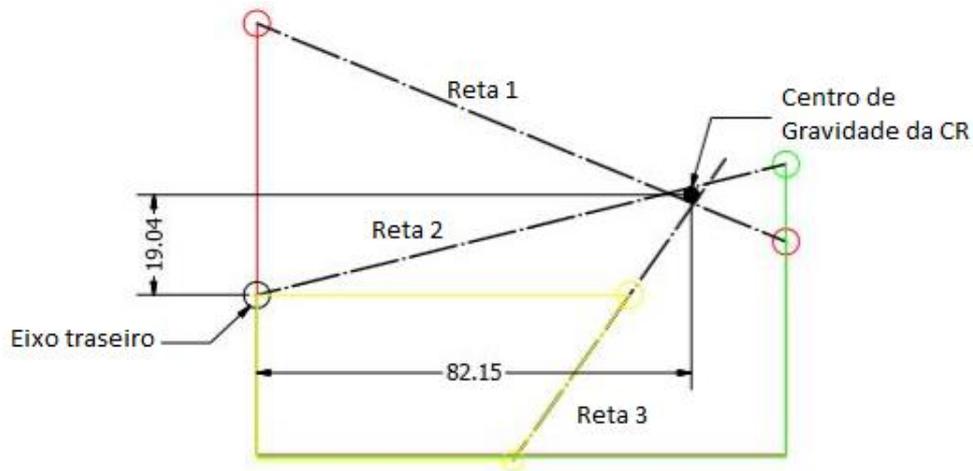


Figure 23 – Intersecção entre as retas

3.3.2. Centro de Massa do Usuário

A posição do centro de massa do usuário varia de uma pessoa para outra devido as características únicas de cada pessoa. Portanto, para encontrar esta posição, foi utilizado dados antropométricos que relacionam o comprimento, massa, e centro de massa para cada parte do corpo humano de acordo com a massa ou altura da pessoa.

Na Figura 31, temos os comprimentos dos segmentos corporais expresso pela altura do usuário. Já na tabela 4, temos o Centro de Massa e Raio de Giração de cada segmento expressado também pela altura.

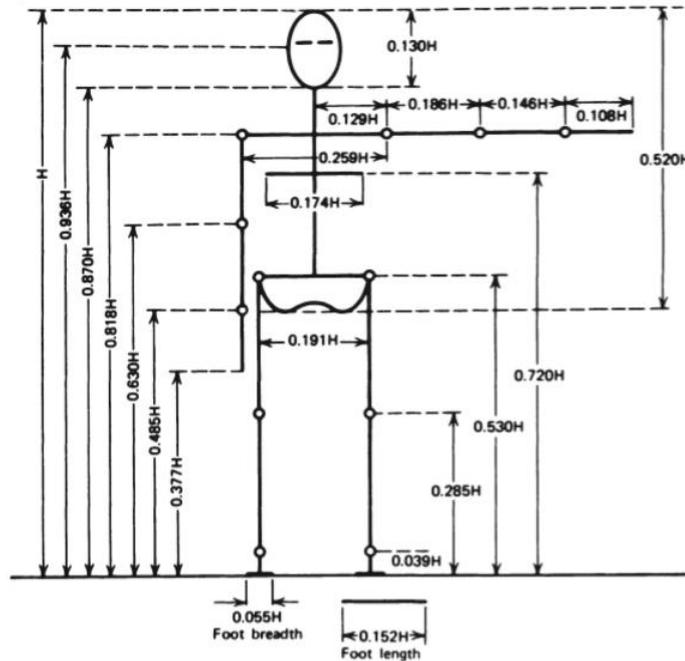


Figure 24 – Segmentos corporais em relação a altura do usuário

Fonte: Winter, 2009

Tabela 3 – Dados para cálculo do centro de massa

Segment	Definition	Segment Weight/Total Body Weight	Center of Mass/ Segment Length		Radius of Gyration/ Segment Length			Density
			Proximal	Distal	C of G	Proximal	Distal	
Hand	Wrist axis/knuckle II middle finger	0.006 M	0.506	0.494 P	0.297	0.587	0.577 M	1.16
Forearm	Elbow axis/ulnar styloid	0.016 M	0.430	0.570 P	0.303	0.526	0.647 M	1.13
Upper arm	Glenohumeral axis/elbow axis	0.028 M	0.436	0.564 P	0.322	0.542	0.645 M	1.07
Forearm and hand	Elbow axis/ulnar styloid	0.022 M	0.682	0.318 P	0.468	0.827	0.565 P	1.14
Total arm	Glenohumeral joint/ulnar styloid	0.050 M	0.530	0.470 P	0.368	0.645	0.596 P	1.11
Foot	Lateral malleolus/head metatarsal II	0.0145 M	0.50	0.50 P	0.475	0.690	0.690 P	1.10
Leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.0465 M	0.433	0.567 P	0.302	0.528	0.643 M	1.09
Thigh	Greater trochanter/femoral condyles	0.100 M	0.433	0.567 P	0.323	0.540	0.653 M	1.05
Foot and leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.061 M	0.606	0.394 P	0.416	0.735	0.572 P	1.09
Total leg	Greater trochanter/medial malleolus	0.161 M	0.447	0.553 P	0.326	0.560	0.650 P	1.06
Head and neck	C7–T1 and 1st rib/ear canal	0.081 M	1.000	— PC	0.495	0.116	— PC	1.11
Shoulder mass	Sternoclavicular joint/glenohumeral axis	—	0.712	0.288	—	—	—	1.04
Thorax	C7–T1/T12–L1 and diaphragm*	0.216 PC	0.82	0.18	—	—	—	0.92
Abdomen	T12–L1/L4–L5*	0.139 LC	0.44	0.56	—	—	—	—
Pelvis	L4–L5/greater trochanter*	0.142 LC	0.105	0.895	—	—	—	—
Thorax and abdomen	C7–T1/L4–L5*	0.355 LC	0.63	0.37	—	—	—	—
Abdomen and pelvis	T12–L1/greater trochanter*	0.281 PC	0.27	0.73	—	—	—	1.01
Trunk	Greater trochanter/glenohumeral joint*	0.497 M	0.50	0.50	—	—	—	1.03
Trunk head neck	Greater trochanter/glenohumeral joint*	0.578 MC	0.66	0.34 P	0.503	0.830	0.607 M	—
Head, arms, and trunk (HAT)	Greater trochanter/glenohumeral joint*	0.678 MC	0.626	0.374 PC	0.496	0.798	0.621 PC	—
HAT	Greater trochanter/mid rib	0.678	1.142	—	0.903	1.456	—	—

*NOTE: These segments are presented relative to the length between the greater trochanter and the glenohumeral joint.
Source Codes: M, Dempster via Miller and Nelson; *Biomechanics of Sport*, Lea and Febiger, Philadelphia, 1973. P, Dempster via Plagenhoef; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1971. L, Dempster via Plagenhoef from living subjects; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971. C, Calculated.

Fonte: Winter, 2009

O corpo humano possui uma distribuição de massa maior nos membros inferiores até o tórax. Por esta razão, para calcular o centro de massa foi utilizado os segmentos que compõem o HAT (Head, arms and trunk).

Para calcular o centro de massa do corpo humano deve ser obtido o centro de massa de cada segmento e depois calcular a posição resultante. Para isso, utilizamos a seguinte equação:

$$CG_x = \frac{\sum_1^i CGx_i \cdot m_i}{\sum_1^i m_i} \quad (60)$$

$$CG_y = \frac{\sum_1^i CGy_i \cdot m_i}{\sum_1^i m_i} \quad (61)$$

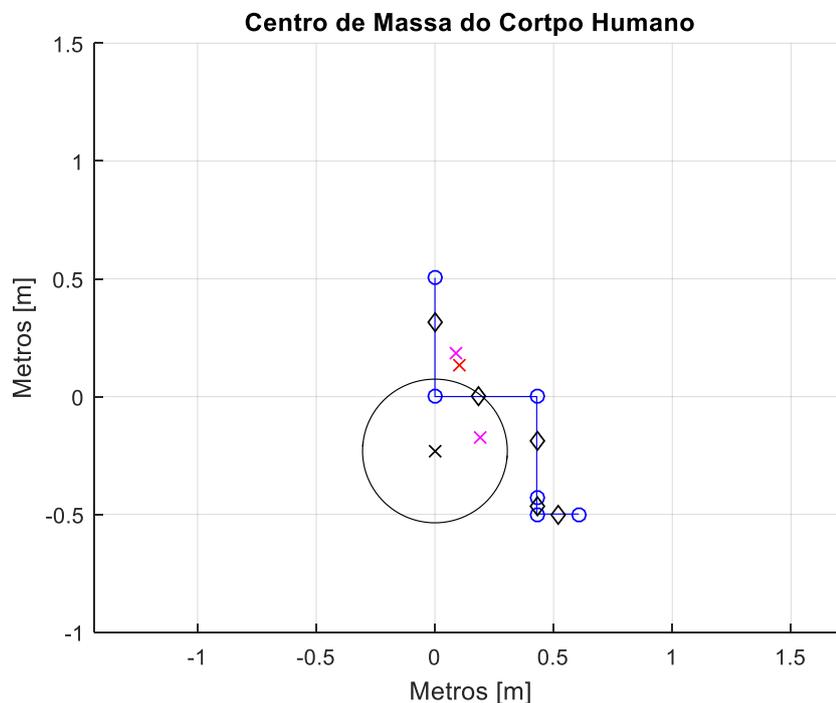


Figure 25 – Centro de Massa do usuário sentado na cadeira de rodas para um usuário de 1,70 m

Fonte: Autor.

Como são diversos segmentos e pelo grau de dificuldade de realizar essas contas manualmente, foi criado um script cujas variáveis são a altura do usuário e fixado a posição

do usuário de acordo com a figura 30. Os círculos da cor azul correspondem a extremidade dos segmentos; os losangos da cor preta correspondem ao centro de massa de cada segmento; o “x” rosa acima da roda corresponde ao centro de massa do usuário; o outro “x” rosa corresponde ao centro de massa somente da cadeira de rodas; e por último o “x” em vermelho é o centro de massa global do sistema.

3.3.3. Massa da Cadeira de Rodas

Para obter a massa da cadeira de rodas foi utilizado uma célula de carga instrumentada com extensômetro, também conhecido como *strain gauge*. Este dispositivo converte a deformação mecânica em uma variação resistiva ôhmica. Portanto, através de um circuito elétrico pode realizar a leitura da tensão dissipada neste resistor e converte-lo em uma unidade de medida. No nosso caso, foi utilizado um equipamento de aquisição de dados (Modelo P3, Arotec Indústria e Comércio) que converte automaticamente a deformação ocorrida na célula de carga para a unidade de medida quilograma



Figure 26 – Medição da massa da cadeira de rodas

Fonte: Autor.

Portanto, para obter a massa da cadeira foi realizado a fixação da célula de carga na estrutura representada na figura 26 e em seguida foi fixado a cadeira de rodas com o auxílio de uma corda. O experimento foi realizado com as rodas fixadas na cadeira de rodas no primeiro momento, e em seguida, removida as rodas traseiras.

Na figura 26 podemos notar a medição da massa da cadeira com e sem as rodas e também podemos ver no lado direito da imagem a célula de carga utilizada.

A massa obtida da cadeira corresponde a 12,7 kg, enquanto a massa de cada roda corresponde a 2,54 kg.

3.3.4. Momento de Inércia da Roda Traseira

A partir da equação 56, podemos determinar o momento de inércia. Entretanto, para isso é necessário conhecer todas as variáveis da equação. Podemos facilmente obter a massa e a distância entre ela e o eixo de rotação, utilizando balança de precisão e um instrumento de medida. Para determinar o período da oscilação do experimento, utilizamos um tacômetro (instrumento para medir velocidade) fixado no eixo da roda.



Figure 27 – Cadeira de rodas instrumentada com tacômetro.

Fonte: Autor.

Para alcançar melhores resultados, foram utilizadas duas massas calibradas com dimensões bem conhecidas. A primeira massa com 930 g e a segunda com 922 g. A partir de um parafuso de fixação foi possível uni-las e obter uma nova massa com 1852 g.

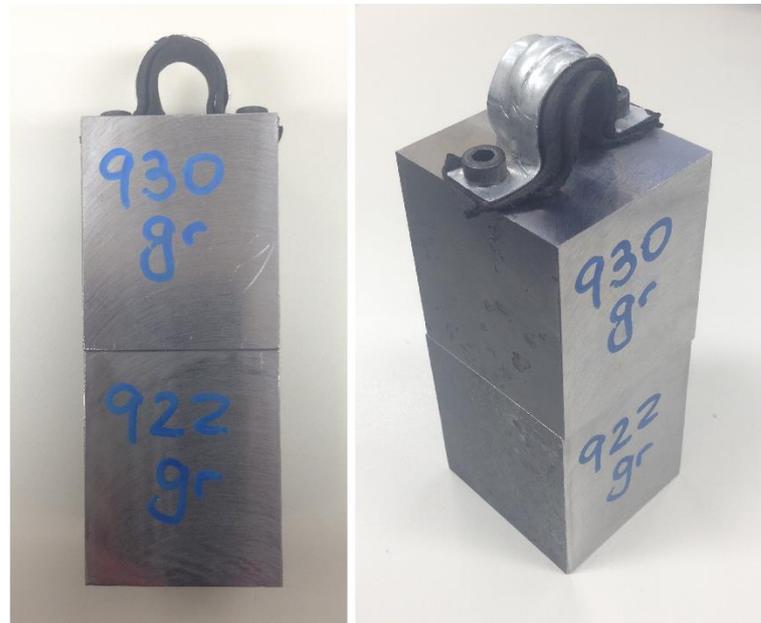


Figure 28 – Massa normalizada.

Fonte: Autor.

Com a roda instrumentada e com as massas conhecidas, foi realizado a fixação dessas massas e o experimento. Para isso, foi obtido a velocidade da massa durante o seu movimento oscilatório sub-amortecido a partir de um ângulo inicial. A cadeira de rodas foi posicionada de maneira que a roda se movimente livremente.

A extração dos dados experimentais foi realizada por uma placa de aquisição de dados da National Instruments PCI 6221-37 e o auxílio do MATLAB. Foi utilizado um pacote capaz de se comunicar com o Simulink em tempo real, conhecido como Real-Time Windows Target (RTWT). O ruído deve ser tratado antes de qualquer outra tarefa. Na Figura 30, sinal original (azul) é o sinal obtido pela placa de aquisição e possui ruído. O sinal em vermelho é o sinal filtrado no MATLAB por um filtro média-móvel, cujo objetivo é diminuir os efeitos do ruído.

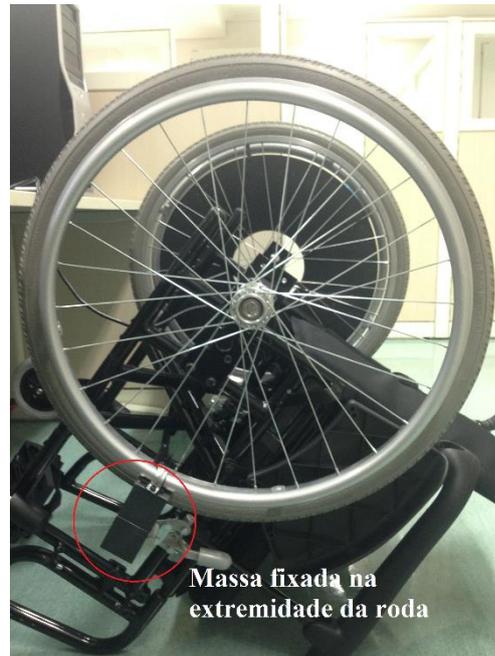


Figure 29 – Massa fixada na extremidade da roda.

Fonte: Autor.

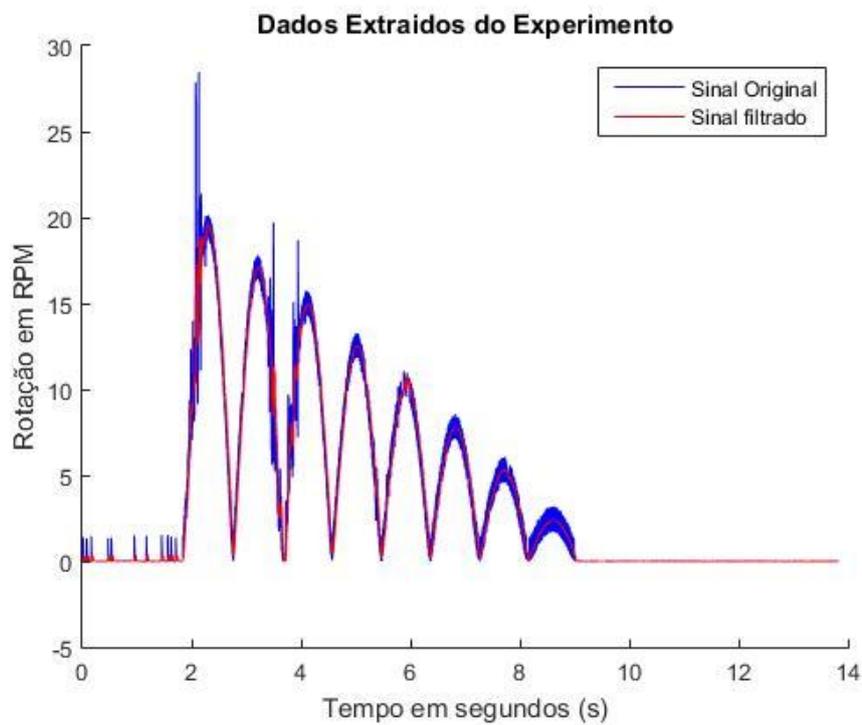


Figure 30 – Velocidade obtida pelo tacômetro.

Fonte: Autor.

Note que o decaimento do sinal no gráfico da figura 22 não se assemelha a uma oscilação harmônica subamortecida, para a qual ocorreria um decremento logarítmico. Isso se deve provavelmente à presença de atrito do tipo seco e/ou atrito de resistência ao rolamento. O lento decaimento, no entanto, evidencia que o atrito é pequeno e que, portanto, a frequência natural de oscilação é muita próxima da frequência natural amortecida, o que justifica a utilização da equação (56).

Na Fig. 21, observa-se também que o sinal aparece retificado. Isso acontece devido à maneira com que o tacômetro faz a leitura dos sinais, pois apenas realiza a leitura de velocidades positivas. Logo, partes da curva foram espelhadas para reproduzir o sinal original de velocidade angular, veja a figura 31.

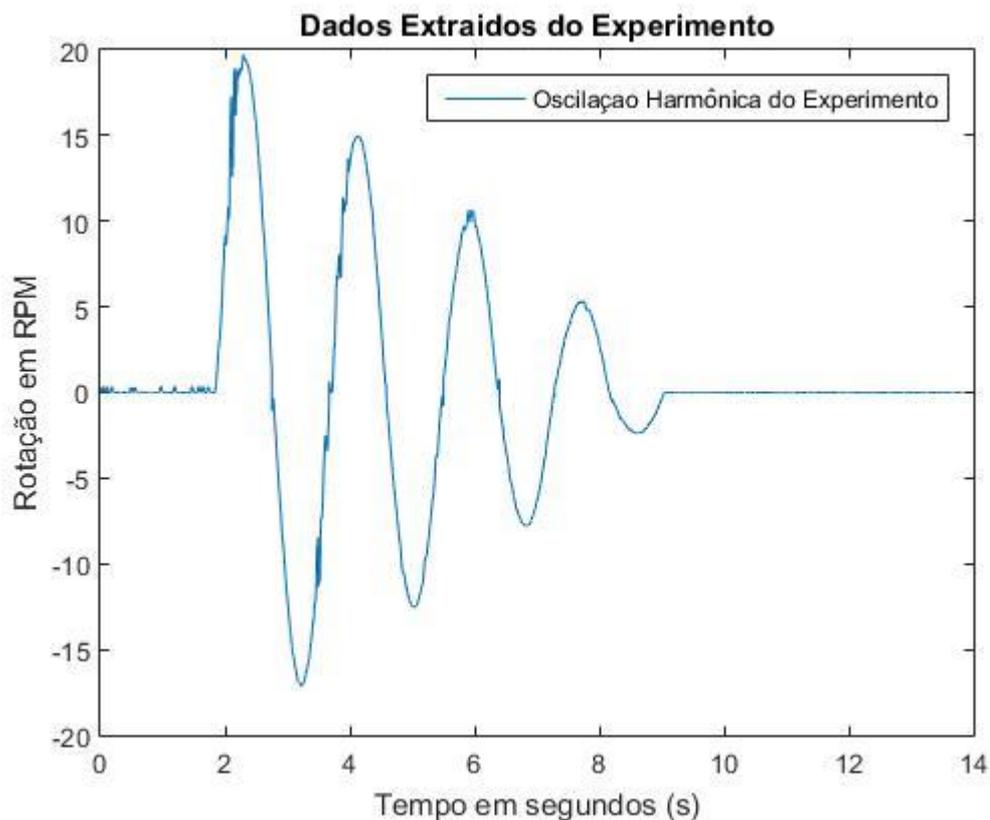


Figure 31 – Decaimento da velocidade da massa.

Fonte: Autor.

Este experimento foi realizado diversas vezes, com o intuito de minimizar o erro. Para isso, foram utilizadas duas massas, e também foi realizado o experimento para cada massa com diversos ângulos iniciais distintos. Para obter melhores resultados, foi utilizado a média dos períodos de uma oscilação para determinar os momentos de inércia. Veja os resultados obtidos na tabela 3

<i>Massa em kg</i>	<i>Ângulo °</i>	<i>Momento de Inércia Kgm²</i>
0.930	15	0.1373
	30	0.1385
	60	0.1407
	90	0.1432
0.922	15	0.1392
	30	0.1401
	60	0.1480

Tabela 4 – Resultado do experimento para determinar o momento de inércia.

Fonte: Autor.

A título de comparação com os valores obtidos experimentalmente, considere que toda a massa da roda esteja concentrada ao longo de sua periferia a uma distância do eixo de 0,275 mm. Neste caso, o momento de inércia seria

$$J_{teo} = m \cdot r^2$$

$$J_{teo} = 2,546 \cdot 0.275^2$$

$$J_{teo} = 0,193 \text{ kgm}^2$$

Como a roda real não possui sua massa concentrada na extremidade dela, espera-se um valor menor que este calculado, como, de fato, observado na tabela 3. Logo, os valores obtidos para os experimentos são consistentes.

3.3.5. Momento de Inércia da Cadeira de Rodas

Para estimar o momento de inércia da cadeira de rodas foi realizado o experimento de oscilação para determinar o período de oscilação. Para isso, foi fixado as rodas da cadeira sobre duas mesas através de grampos de fixação. Para garantir a fixação, também foi utilizado

calços para atenuar a vibração gerada pelo sistema enquanto for submetida pela movimentação da cadeira em torno do eixo das rodas traseiras.



Figure 32 - Oscilação da cadeira de rodas

Fonte: Autor

A extração dos dados experimentais também foi realizada por uma placa de aquisição PCI 6221-37 em tempo real. Devido ao ruído e a qualidade do tacômetro fixado no eixo das rodas foi necessário filtrar os dados e eliminar as frequências menores que 6 Hz. Veja na figura 33 o gráfico obtido no experimento. A linha em ciano é a leitura real do tacômetro, enquanto a linha sobreposta é o sinal filtrado. Na figura 34 representa o resultado final da filtragem e ajuste dos dados experimentais sobre os dois planos no gráfico.

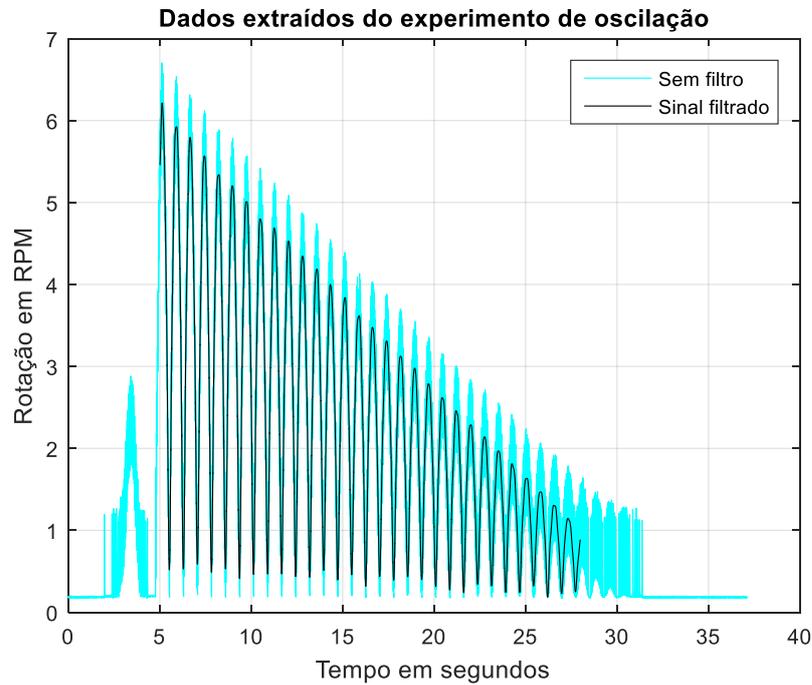


Figure 33 – Experimento de oscilação da cadeira de rodas

Fonte: Autor

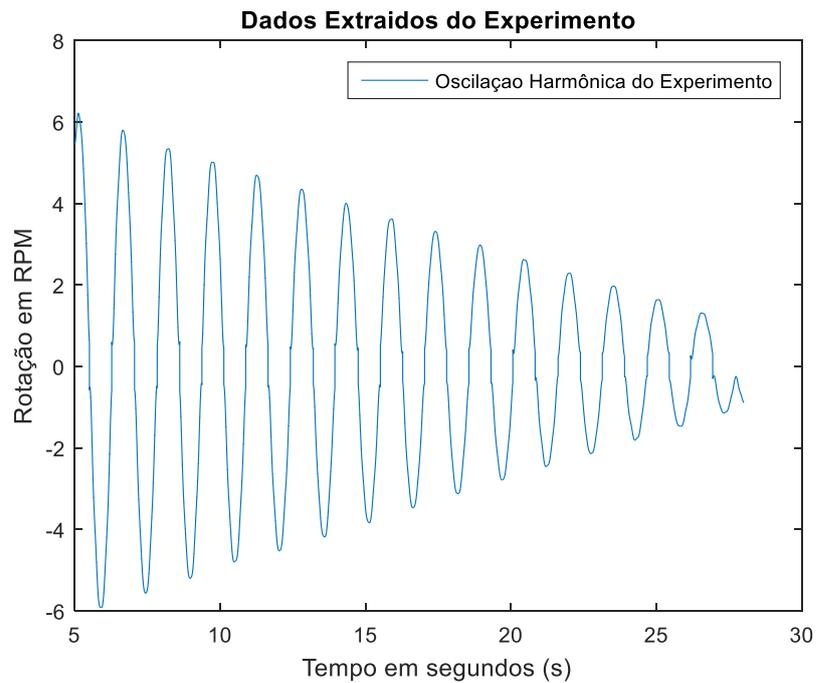


Figure 34 – Resultado final da oscilação da cadeira de rodas

Fonte: Autor.

Portanto, através da figura 34, foi extraído o período de oscilação. Em seguida, foi determinado o momento de inércia da cadeira de rodas utilizando a equação 56, que corresponde a $1,67 \text{ kgm}^2$.

A título de comparação com os valores obtidos experimentalmente, considere que toda a massa da cadeira de roda esteja concentrada no centro de massa que está localizado a 256 cm do eixo traseiro. Neste caso, o momento de inércia seria

$$\begin{aligned} J_{teo} &= m \cdot r^2 \\ J_{teo} &= 17,79 \cdot 0.256^2 \\ J_{teo} &= 1,17 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Como o centro de massa da cadeira de rodas foi obtido experimentalmente. Portanto, é apenas uma estimativa, podemos considerar os resultados consistente. Por exemplo para uma variação de 15% da distância do centro de massa, temos um momento de inércia equivalente a $1,54 \text{ kgm}^2$.

3.3.6. Força aplicada para iniciar o *wheelie*

Como já descrito neste trabalho, temos dois modelos dinâmico que regem o sistema: com 1 grau de liberdade, onde a cadeira está com todas as rodas sobre o chão e com 2 graus de liberdade, no qual a cadeira está apenas sobre duas rodas. Portanto, para analisar o momento da transição do estado com 1 grau para 2 graus de liberdade, foi gerado um gráfico que relaciona a altura do usuário, a distância longitudinal do eixo traseiro para encontrar o torque necessário para realizar o *wheeling*.

Como já descrito, utilizando a equação (49) que corresponde a aceleração na eminência do empinamento na equação (12), temos a seguinte equação:

$$\frac{\tau}{R} = \left(M + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{r^2} \right) \cdot \frac{g \cdot L_T}{h_G} + F_R + F_r \quad (62)$$

Utilizando a equação (62) foi analisado o torque mínimo necessário para realizar o *wheeling* para a variação de altura de 1,6 a 1,9 m e com uma variação de 20 cm da distância horizontal do centro de massa com o ombro. A massa do usuário foi calculada a partir da sua estatura para um Índice de Massa Corporal (IMC) de 25. Note na figura 35 que para um deslocamento de apenas 5 cm resulta em uma diferença de 20 Nm.

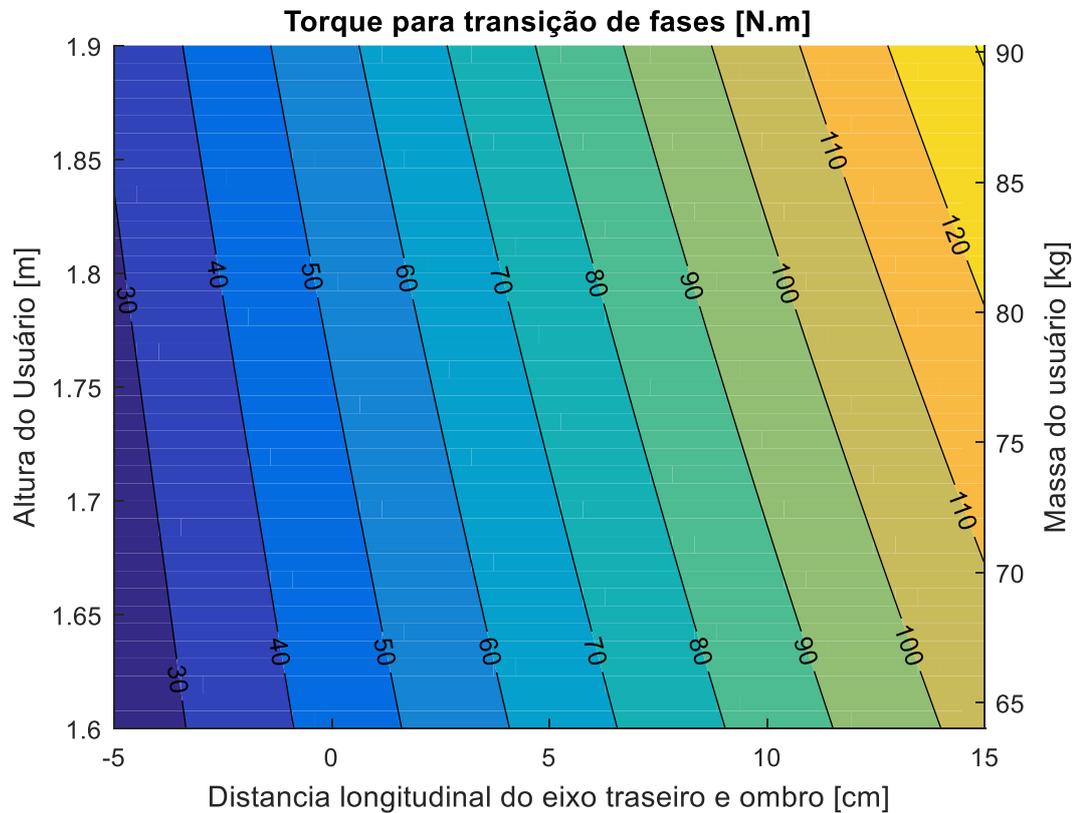


Figure 35- Análise do torque que deve ser aplicado a roda para empinar a CR.

Fonte: Autor.

3.4. Simulação do regulador linear

Para testar o controlador proposto neste trabalho, foi elaborado um programa no Matlab para simular a tarefa de empinar. Veja na figura 36 a representação da cadeira de rodas realizando o *wheelie*. Logo, abaixo podemos ver também a resposta das variáveis do sistema. Note que o sistema fica instável depois de 1s.

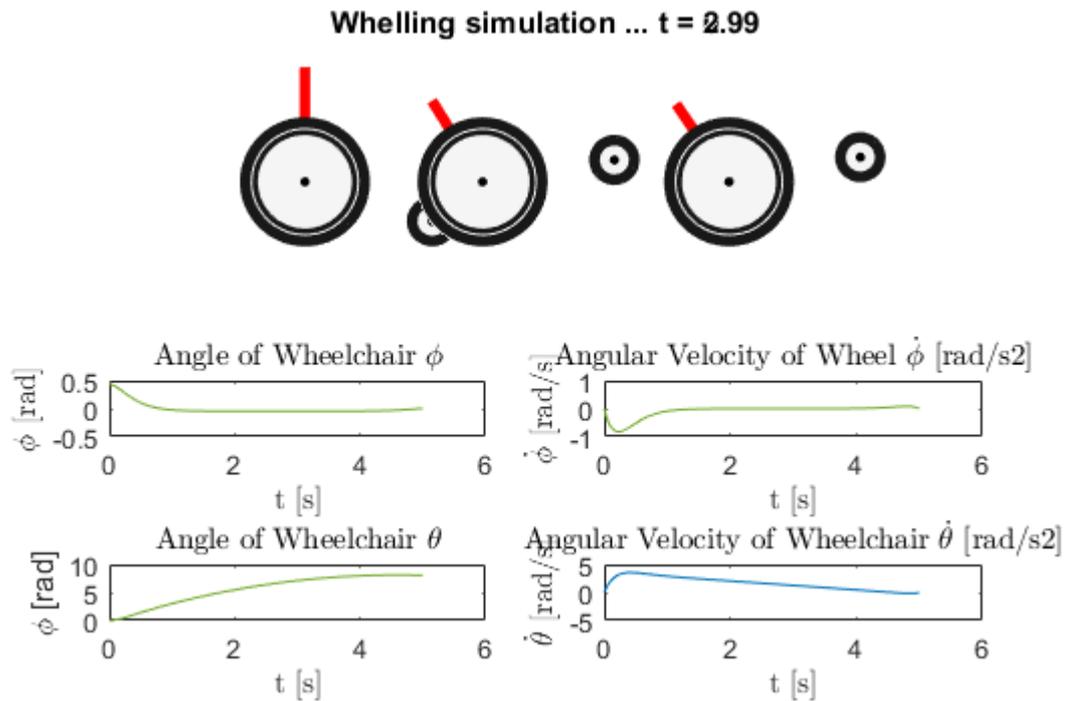


Figure 36 – Simulação do regulador linear

Fonte: Autor

4. Conclusão

Neste trabalho de Iniciação Científica, investigou-se o movimento de *wheelie* de cadeiras de roda e desenvolveram-se modelos do sistema antes e depois do levantamento das rodas dianteiras do chão. Os parâmetros dos modelos foram levantados experimentalmente e o modelo ajustado resultante foi utilizado para simular o movimento de *wheelie* e para projetar um controlador capaz de estabilizar o sistema após o levantamento, fase em que o sistema é instável sem o controlador.

Este trabalho ainda continuará em desenvolvimento por um grupo de alunos do curso de Engenharia de Automação e Controle, incluindo o autor como trabalho de conclusão de curso.

5. Apêndice

5.1. Artigo publicado no 6th International Conference on Modelling, Simulation and Identification (MSI 2016)

OPTIMAL CONTROL OF THE WHEELCHAIR WHEELIE

Erivelton G. dos Santos, Fabrizio Leonardi, Marko Ackerman
FEI University

Av. Humberto de Alencar Castelo Branco, 3972-B - Assunção, São Bernardo do Campo - SP, 09850-901 /Brazil
erivelton.gualter@gmail.com, fabrizio@fei.edu.br, mackermann@fei.edu.br

ABSTRACT

The wheelchair wheelie is a maneuver employed to overcome obstacles and descend ramps, for instance. The task is similar to the stabilization problem of an inverted pendulum that is extensively described in the control theory literature. However, in this case, the goal is to maintain the user and the wheelchair in equilibrium on wheels, which is achieved when the center of mass of the system is aligned with the rear axle in the vertical direction. This work investigates a controller to perform the wheelie in power-assisted wheelchairs using optimal control theory and a model of the user and wheelchair system. The proposed approach leads to a controller capable of rising the wheelchair, which is able to reject perturbations and which is robust to typical parameter uncertainties.

KEY WORDS

Wheelie, wheelchair, optimal control

1. Introduction

According to Copper *et al.* [1], manual wheelchairs are commonly used by people with lower limb disability, such as spinal cord injury, lower limb amputations or stroke. As reported in 2010 by *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística* (IBGE), there are 45.6 million Brazilians with some kind of disability. Among them, 7% have motor disabilities and are users or potential users of wheelchairs. In daily life, many wheelchair users suffer upper limbs injuries and face difficulties such as excessive effort during wheelchair propulsion on inclined surfaces and obstacle negotiation [2-10].

In order to reduce some of these difficulties, power-assisted wheelchairs have been proposed [4-10]. These wheelchairs are equipped with motors attached to the wheels which assist the user during manual propulsion rather than completely replace the manual propulsion as occurs with the electric wheelchair. Most power-assisted wheelchairs do not have a control system with feedback sensors and are not able to perform or sustain the wheelie, a maneuver consisting of balancing the wheelchair on two wheels (Figure 1). This maneuver is important for active users because it allows surpassing obstacles such as sidewalks or uneven terrain. Kirby *et al.* [11], for instance,

explain in details the importance of the wheelchair wheelie in different situations.

Recent studies in the literature propose control systems and strategies to permit the wheelie in power-assisted wheelchairs. Sehoon *et al.* [12], for instance, propose a controller able to identify the environment and operate in adverse situations, such as overturning and the support of the propulsion on inclined surfaces. Takahashi *et al.* developed a power-assisted wheelchair to climb steps and maintain its equilibrium during this task [2-7]. In addition, the wheelchair has a system to shift the center of mass to perform the task. A motor shifts the wheelchair backwards, which results in the center of mass closer to the rear wheel, easing the lift of the front wheels. The control system is only active when the wheelchair is on two wheels [4-10].

In this context, the aim of this paper is to propose a control strategy to initiate and sustain the wheelie in power-assisted wheelchairs using an optimal control formulation and a model of the user and wheelchair system. The system requirements are investigated on the light of optimal rising patterns and the robustness of the controller to parameter uncertainties and to a typical perturbation is verified.

2. Wheelchair-User Model

2.1 Mechanical Model

When the four wheels of the wheelchair are on the ground, the system is stable and the model is composed of two bodies, the rear wheels and the rigid body containing the user and the wheelchair without its rear wheels. If there is no rear wheel slip, this model has one degree of freedom (Figure 1, left). This phase is referred to as phase 1. The wheelie requires rising the front wheel from the ground and balancing the wheelchair on the two rear wheels (Figure 1, right). In this phase, named phase 2, the model is composed of the same two bodies but it has two degrees of freedom. In this phase, the system is unstable.

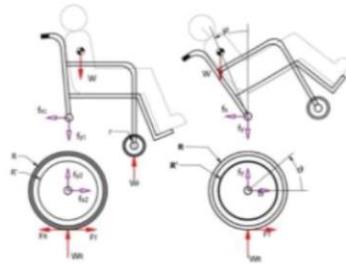


Figure 1. Model of the wheelchair-user system in phase 1 on the left and 2 on the right.

The equation of motion governing the dynamics of the model in phase 1 is

$$\tau R = M + JRR^2 \ddot{x} + FR \quad (1)$$

where τ is the moment applied by the user and/or the assistance motor, M is the total mass of the system, R is the rear wheel radius, x is the forward displacement of the wheelchair, FR is the rolling resistance force, and JR is the moment of inertia of both rear wheels. Equation 1 is valid for the wheelchair on an even surface.

In phase 2, the system is an analog to the inverted pendulum on a cart. The equations of motion governing the model dynamics in this phase are

$$\begin{aligned} \tau - FR - R &= [R + M_r + M_c R^2 \theta + M_c R l \cos \varphi \ddot{\varphi} - M_c R l \varphi^2 \sin \varphi - \\ \tau &= M_c l R \cos \varphi \ddot{\theta} + J_c + M_c l^2 \ddot{\varphi} - M_c g l \sin \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

where θ is the rear wheel angular displacement, φ is the upper body (user + wheelchair) angle with the vertical (Figure 1, right), M_r is the mass of both rear wheels, M_c is the mass of the upper body user + wheelchair without rear wheels, JR is the moment of inertia of both rear wheels with respect to the wheels axle, J_c is the moment of inertia of the upper body with respect to its center of mass, g is the gravity acceleration and l is the distance between the rear wheels' axle and the upper body's center of mass.

The rolling resistance force is the main opposing force according to Brubaker [13] and depends on many factors, including the normal load on the tire, the tire radial stiffness, the wheel radius and the inflation pressure [14]. According to [12], the rolling resistance force can be expressed as a function of the normal force N as

$$FR = \mu RN \quad (3)$$

where μ is the friction coefficient and R is the rear wheel radius.

We have already shown the equations of motion for phase 1, Eq. (1), in which the wheelchair is stable with four wheels on the ground, and for phase 2, when wheelchair is on two wheels, Eq. (2). It is useful, for motor and controller design purposes, to determine the conditions that set the transition from one phase to the other. The transition occurs when the normal force on the front wheels reaches null in phase 1, which corresponds to the eminence of lifting off.

In order to determine the wheel torque necessary to lift off the front wheels, we first computed the forward acceleration that leads to a null normal force at the front wheels as

$$\ddot{x}_{nf} = dxcg/hcg \cdot g, \quad (4)$$

where $dxcg$ is the distance between the rear wheel axle and the center of mass of the user + wheelchair, and hcg is the height of the center of mass of the user + wheelchair with respect to the ground. Plugging Eq. (4) into Eq. (1) yields

$$\tau_{nf} = M + JRR^2 dxcg/hcg \cdot g + FR - R, \quad (5)$$

which computes the torque necessary to lift off the front wheels from the floor and initiate phase 2.

2.2 Model parameters

In this study, we employed wheelchair parameters measured from a real wheelchair available in the market (Agile 2009, Ortopedia Jaguaribe Indústria e Comércio). As most parameters appearing in Eqs. (1), (2) and (4) are not provided by the manufacturer, it was necessary to estimate them experimentally.

The moments of inertia of the wheels with respect to its axis and of the wheelchair with respect to its center of mass were estimated using oscillation experiments [15]. The data were collected using a tachometer (Hohner Eletrônica Ltda., Artur Nogueira-SP) connected to the rear axle and a data acquisition board (NI PCI-6221 37pin, National Instruments). The measured moment of inertia of the rear wheel is 0.140 kg.m² and the moment of inertia of the wheelchair without wheels with respect to its center of mass is 1.67 kg.m².

The rear wheel mass was measured as 2.546 kg and the wheelchair mass without rear wheels was measured as 12.71 kg. The location of the wheelchair's center of mass was estimated by suspending the wheelchair from three different positions.

In order to calculate the mass, moment of inertia and center of mass location of the human body in the seated position, we used normative, anthropometric relationships reported in [16] as functions of user stature and total mass. The rolling resistance force F_R was neglected and

set to 0. All these data were used to compute the parameters of the bodies in Eqs. (1), (2) and (4). The parameter values computed for a user mass of 75 kg, a user stature of 1.75 m, and the user shoulder vertically aligned with the rear wheel axle, adopted in this study as the nominal condition (mass of 75 kg, stature of 1.75 m and horizontal axle-shoulder distance of 0), are reported in table 1.

Table 1
Parameters used for the nominal condition

Parameter	Value	Parameter	Value
M	87.7 kg	R	0.305 m
Mc	12.7 kg	dxcg	0.107 m
Mr	2.54 kg	hcg	0.436 m
JR	0.14 kg.m ²	xnf	1.57 m/s ²
Jc	1.67 kg.m ²	tnf	45.1 N

3. Methods

3.1 Optimal Control Formulation

There are infinite torque histories that can bring the wheelchair from lift off to the unstable equilibrium position in wheelie. In order to determine a reference, optimal trajectory in terms of minimum motor effort, an open-loop optimal control problem is formulated and solved for the nominal system parameters (user's mass of 75 kg, user's stature of 1.75 m and user's shoulder vertically aligned with rear wheel axle).

The optimal control problem consists of searching for the time histories of the system states, $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, the control (rear wheel torque), $\tau(t)$, and the final time, t_f , that minimize the cost function

$$J = \int_0^{t_f} \tau^2 dt, \quad (6)$$

representing the motor effort, subject to the equations of motion in phase 2, Eq. (2), to the boundary conditions: $\theta_0=0$, $\dot{\theta}_0=0$, $\varphi_0=\varphi_0$, $\dot{\varphi}_0=0$, $\theta_{t_f}=0$, $\dot{\theta}_{t_f}=0$, and $\varphi_{t_f}=0$, and to the upper bound of 5 s on t_f , where φ_0 is the initial upper body angle with the vertical as defined in Figure 1, with all four wheels on the ground.

This optimal control problem was solve using the commercial optimal control package PROPT (Tomlab Optimization Inc.) which implements a pseudo-spectral direct collocation method and the large-scale optimization package SNOPT (Tomlab Optimization Inc.).

3.2 Controller

The inspiration of the control law is the state feedback

$$\tau = -k \cdot x, \quad (7)$$

and its determination through the solution of the problem of Linear Quadratic Regulation (LQR). Figure 2 shows a schematic diagram of the system with the control law in state space representation, where the state vector

$$x = \varphi \varphi \dot{\theta} \quad (8)$$

represents the state variables of the system,

$$x^T = \varphi \varphi \dot{\theta} r \quad (9)$$

is the reference vector, τ is the system's control (rear wheel torque) and d is the disturbance.

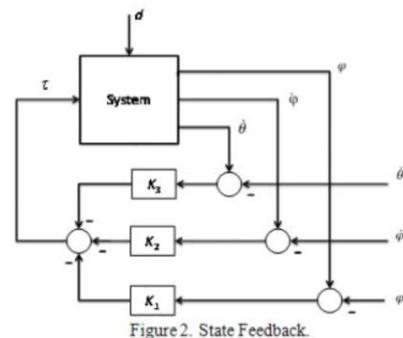


Figure 2. State Feedback.

Because the linearized dynamic model is approximately the same as the nonlinear model as φ and $\dot{\varphi}$ are small, the adopted control law tends to have good properties like those of the LQR. The linear quadratic regulator gives the system large gain and phase margins, which generally implies robust stability. The control law also provides tolerance to calibration errors of the φ angle sensor. One concern of regulatory control is precisely the calibration of the sensors and its implications on system performance. Note that one of the objectives of this control system is to ensure that φ is approximately null during the unstable equilibrium configuration. Depending on the control strategy adopted, an angular offset arising from a sensor calibration error would require a constant acceleration response of the system to balance the wheelchair on two wheels with the center not vertically aligned with the rear wheel axle. The strategy adopted tolerates this kind of sensor error because the angular velocity $\dot{\theta}$ is a state of the system. Because the angular velocity of the rear wheels follows a constant or null

reference, the stable solution is associated with the actual vertical angle ϕ , regardless of small errors in the sensor calibration. This good property can be verified by the steady gain between $\dot{\phi}^r$ and $\dot{\phi}$ which results null.

Although the system tends to have a good robust stability, the difference between the nominal plant model used to design the control law and the model with actual parameters causes an increase in the relative control effort, which is directly proportional to that difference.

Optimal controller gains in Eq. (7) were determined using the optimal control problem formulation described in the previous section, with the difference that the control τ is computed as in Eq. (7), so that the only optimization parameters are the three controller parameters K1, K2 and K3. The resulting optimal values are K1 = -346.42, K2 = -105.44 and K3 = -7.6063.

5. Results

5.1 Lift off torque

Equation (5) provides the minimum rear wheel torques required to lift the wheelchair and initiate phase 2. This equation was used to construct a diagram, Figure 3, that shows the necessary wheelchair lift off torques for different combinations of user's stature and horizontal distance between the shoulder joint and the rear wheel axle. The user's mass was computed from user's stature for a Body Mass Index (BMI) of 25. The position of the shoulder with respect to the rear wheel axle can be adjusted in many wheelchairs and is an important parameter for the wheelie maneuver. In fact, the diagram shows that the lift off torques are very sensitive to this adjustment. An offset of only 5 cm is sufficient to increase the lift off torque by as much as 20 N.m.

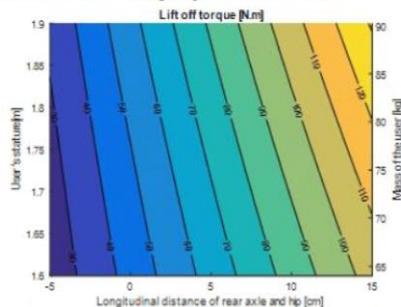


Figure 3. Influence of the user's stature, user's mass and horizontal wheel-shoulder distance on wheelchair lift off torque.

5.2 Open-loop optimal patterns

The optimal patterns obtained by solving the open-loop optimal control problem for the rising phase with minimum motor effort and for the nominal user mass and stature (75 kg and 1.75 m) is shown in Figure 4. The initial condition corresponds to the wheelchair resting with the front wheels in contact with the ground. The results show that, although it took 5 s for the wheelchair to achieve exactly the specified final boundary conditions ($\phi = \dot{\phi} = \theta = 0$), the wheelchair rising movement occurred in less than a second, with the remaining time used for stabilization. Note that the maximum torque occurs at the beginning of the wheelie maneuver and achieves about 90 N.m. After this initial large torque, it falls sharply as the system's center of mass aligns vertically with the rear wheel axle. A horizontal displacement of the wheelchair occurs with a nearly complete rear wheel turn. The cost function value representing the control effort to complete the wheelie maneuver is $J = 964.3 \text{ N}^2 \cdot \text{s}$.

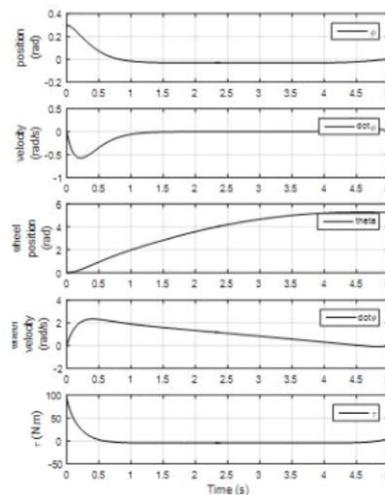


Figure 4. Open-loop optimal patterns for nominal system parameters (mass of 75 kg, stature of 1.75 m and horizontal axle-shoulder distance of 0).

5.3 Closed-loop system response

The system response for the nominal condition is depicted in Figures 5, 6 and 7 by the bold solid line. The first 5 s correspond to the rising phase, in which the wheelchair rises from an initial condition for the front wheels on the ground to the equilibrium, upwards condition. At instant $t = 5$ s, the reference rear wheel angular velocity $\dot{\theta}_r$ is set to 1 rad/s. The system response to this change in the reference velocity is shown in the interval between $t = 5$ s and $t = 10$ s. At the instant $t = 10$ s, the system is subject to an impulsive disturbance that reproduces a horizontal force of 10 N applied 1 m above the rear wheel axle with a duration of 0.1 s. The system's disturbance rejection dynamics is shown in the interval between $t = 10$ s and $t = 15$ s.

Note that the system response in the rising phase (Figures 5, 6 and 7), is similar to the optimal patterns (Figure 4) computed by solving the open-loop optimal control problem. In fact, the motor effort simulated during the rising phase for the closed-loop system lead to a cost function value of $J = 1000.2$ N2.s, which is just marginally larger than the control effort obtained by solving the open-loop optimal control problem ($J = 964.3$ N2.s).

The robustness of the controller to some of the main system parameter uncertainties was assessed by simulating the system response to variations of user mass (Figure 5), stature (Figure 6) and horizontal distance between user's shoulder and wheel axle (Figure 7). Figure 5 shows the closed-loop system response for different values of user's mass: 60 kg, 75 kg (nominal) and 90 kg, with the other parameter values kept on their nominal values. Figure 6 shows the closed-loop system response for different values of user's stature: 1.60 m, 1.75 m (nominal) and 1.90 m, with the other parameter values kept on their nominal values. Figure 7, in turn, shows the closed-loop system response for different values of the horizontal distance of the user's shoulder with respect to rear wheel axle: -0.05 m, 0.00 m (nominal), 0.05 m and 0.10 m, with the other parameter values kept on their nominal values.

In addition to enabling the regulation of the state variables x and asymptotic tracking wheel reference speed $\dot{\theta}_r$, the system can also reduce the effects of external disturbance d . Assume, for example, an impulsive disturbance that reproduces a horizontal force of 10 N applied 1 m above the center of mass along 0.1 s. The graphs in figure 5, 6 and 7 show the dynamics of this rejection from its application at 10 s.

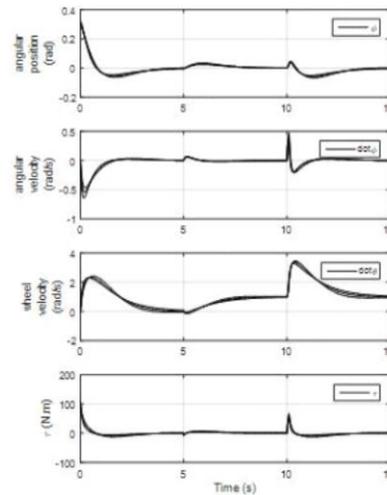


Figure 5. Closed-loop response for different values of user's mass: 60 kg, 75 kg (nominal) and 90 kg.

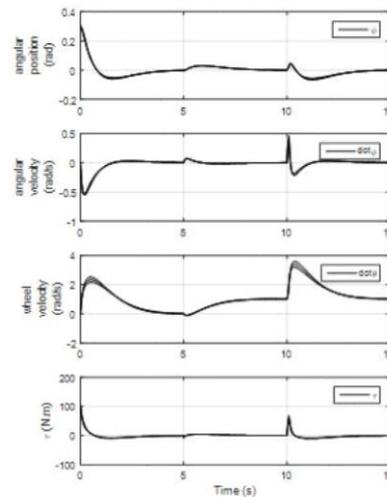


Figure 6. Closed-loop response for different values of user's stature: 1.60 m, 1.75 m (nominal) and 1.90 m.

While it is necessary to prove this hypothesis, the disturbance rejection noticed suggests that other types of disturbance can also be rejected by the control system. Such disturbance may represent, for example, small variations in floor conditions.

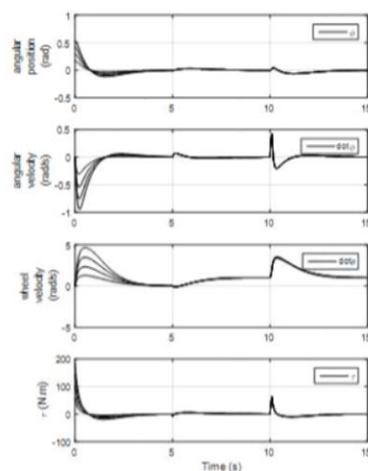


Figure 7. Closed-loop for different values of the horizontal distance of the user's shoulder with respect to rear wheel axle: -0.05 m, 0.00 m (nominal), 0.05 m and 0.10 m.

6. Discussion and Conclusion

This work investigates the control of the wheelie in power-assisted wheelchairs that to assist users in tasks such as overcoming obstacles and going down ramps. The wheelie task consists of two distinct phases: the front wheel rising from the position with all four wheels on the ground and the balance of the wheelchair-user on two wheels. The transition from the first to the second phase requires high control effort, however with short duration, while the second phase requires a closed loop control.

The proposed methodology uses a model of the wheelchair-user system whose parameters are experimentally determined for a commercial wheelchair and for an average stature and mass of the user. The lifting phase was investigated through the formulation and solution of an optimal control problem in open loop, which aims to minimize motor effort, given the physical

limitations of the problem and a maximal duration of 5 s to complete this phase. The open-loop optimal control problem solution serves as a performance reference for the closed-loop controller design.

We proposed a design of the wheelchair-user system controller to maintain balance on two wheels inspired on a Linear Quadratic Regulation method for determining our state-feedback control. All references of the states were maintained null and the gains were determined by the formulation and solution of an optimal control problem in the lifting phase, without the end time specification. In order to achieve lifting patterns similar to the open-loop optimal control solution, we established restrictions on the states' settling time, whose values were obtained by trial and error until similar control and state patterns were obtained.

Aiming at practical application, no specification regarding the displacement of the wheelchair during the lift off was included in the project. This allows the setting of a speed reference by the user, for example, by means of a joystick. With this strategy, a displacement of the wheelchair during the lift off phase is expected, as shown by the 6 graph in Figure 4. From a practical point view, it means the user does not have to worry about obstacles behind the wheelchair, but only in front during the lifting. Observe in Figure 4 that the lifting is almost completed in about 1 s and the remaining time is used only to fine-tune the balance. A quick lifting like this could result in discomfort to the user, but a related restriction on this could be easily incorporated into the optimal control problem, such as limiting the maximal acceleration of the ϕ angle.

Figures 5 to 7 illustrate the performance of the closed loop control system in three situations and parametric variations. On the one hand, the results in Figures 5 and 6 show that the controlled system response is quite insensitive to variations in mass and height of the user, regardless of the situation. On the other hand, the results in Figure 7 show large sensitivity to variations on horizontal position of the center of mass in the lift off phase, although this parameter has little effect on system response to the disturbance at $t = 10$ s.

The large torques at lift off, albeit with short duration, are remarkable and would require the selection of large motors. In order to reduce the size of the motors, it is possible to recommend users adjust their wheelchairs so that the center of mass is closer to the rear axle, or to instruct users to perform a trunk backwards motion just before lift off.

Figures 5 to 7 show, in the interval from 5 s to 10 s, the system response to a change in the angular velocity reference from 0 to 1 rad/s. Note that the settling time of the system velocity is of about 3 seconds with a transient response quite similar for all parametric variations considered. We notice also that at the beginning of this maneuver, the wheelchair wheels are driven briefly

backwards. This sets the body in forward motion and allows initiation and subsequent sustaining of forward system motion.

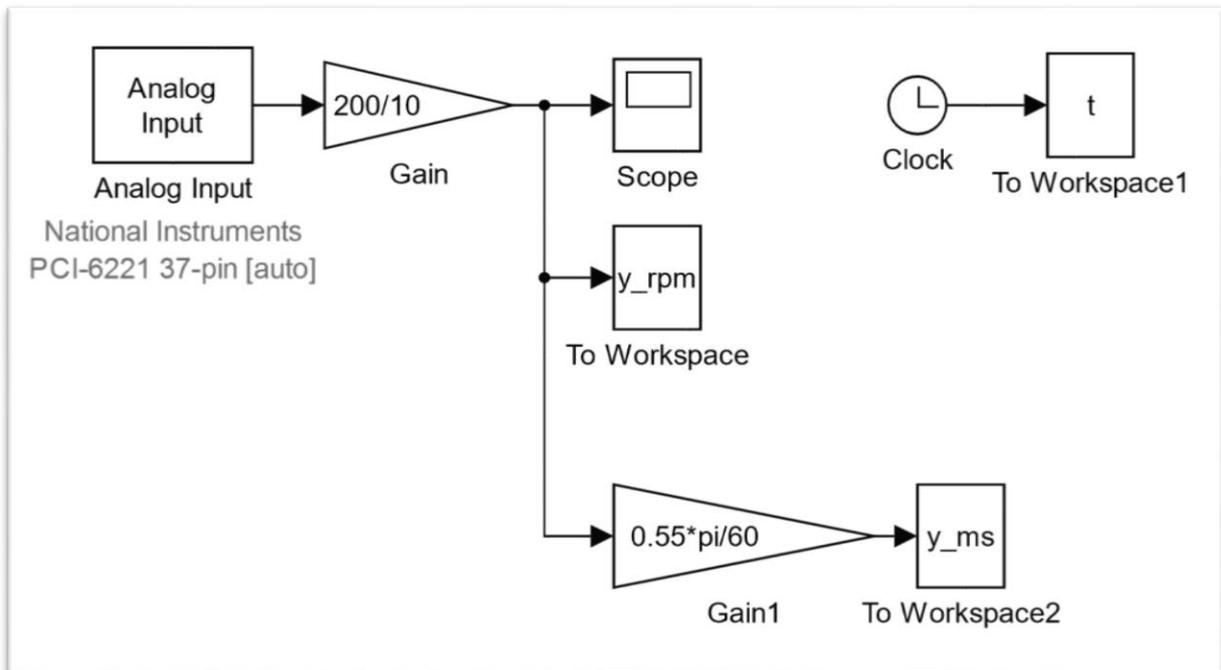
Figures 5 to 7 show that system's response is insensitivity to the tested parametric variations for a short 10 N disturbance at $t = 10$ s. However, rejecting the disturbance requires applying a large motor torque, albeit with short duration. This means that large disturbances may cause actuator saturation, compromising rejection.

Limitations of the study include the fact that parametric robustness was evaluated for each parameter separately, representing only a response sensitivity to that particular parameter. Future studies should include the simultaneous change of multiple parameters. Another limitation of the study relates to the simplifications of the model, which include the absence of the rolling resistance force, motion constrained to a plain and not exploiting the interaction between the user and the wheelchair. Moreover, the possibility of actuator saturation was not considered. Future studies should address these limitations.

References

- [1] Cooper, Rory A. "A systems approach to the modeling of racing wheelchair propulsion." *J Rehabil Res Dev* 27.2 (1990): 151-62.
- [2] Desroches, Guillaume, Rachid Aissaoui, and Daniel Bourbonnais. "Relationship between resultant force at the pushrim and the net shoulder joint moments during manual wheelchair propulsion in elderly persons." *Archives of physical medicine and rehabilitation* 89.6 (2008): 1155-1161.
- [3] Van der Woude, L. H. V., et al. "Biomechanics and physiology in active manual wheelchair propulsion." *Medical engineering & physics* 23.10 (2001): 713-733.
- [4] Takahashi, Yoshihiko, Shinobu Ogawa, and Shigenori Machida. "Experiments on step climbing and simulations on inverse pendulum control using robotic wheelchair with inverse pendulum control." *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 30.1 (2008): 47-61.
- [5] Takahashi, Yoshihiko, Shigenori Machida, and Shinobu Ogawa. "Analysis of front wheel raising and inverse pendulum control of power assist wheel chair robot." *Industrial Electronics Society, 2000. IECON 2000. 26th Annual Conference of the IEEE*. Vol. 1. IEEE, 2000.
- [6] Takahashi, Yoshihiko, Shinobu Ogawa, and Shigenori Machida. "Step climbing using power assist wheel chair robot with inverse pendulum control." *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA'00. IEEE International Conference on*. Vol. 2. IEEE, 2000.
- [7] Takahashi, Yoshihiko, et al. "Back and forward moving scheme of front wheel raising for inverse pendulum control wheel chair robot." *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*. Vol. 4. IEEE, 2001.
- [8] Takahashi, Yoshihiko, Nobutake Ishikawa, and Tomomichi Hagiwara. "Soft raising and lowering of front wheels for inverse pendulum control wheel chair robot." *Intelligent Robots and Systems, 2003. (IROS 2003). Proceedings. 2003 IEEE/RSJ International Conference on*. Vol. 4. IEEE, 2003.
- [9] Ahmad, Salmiah, and M. Osman Tokhi. "Linear Quadratic Regulator (LQR) approach for lifting and stabilizing of two-wheeled wheelchair." *Mechatronics (ICOM), 2011 4th International Conference On*. IEEE, 2011.
- [10] Ahmad, Salmiah, and M. Osman Tokhi. "Modelling and control of a wheelchair on two wheels." *Modeling & Simulation, 2008. AICMS 08. Second Asia International Conference on IEEE*, 2008.
- [11] Kirby, R. Lee, Judy A. Lugar, and Catharine Breckenridge. "New wheelie aid for wheelchairs: controlled trial of safety and efficacy." *Archives of physical medicine and rehabilitation* 82.3 (2001): 380-390.
- [12] Oh, Sehoon, Naoki Hata, and Yoichi Hori. "Control developments for wheelchairs in slope environments." *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE*, 2005.
- [13] Brubaker, C. E. "Wheelchair prescription: an analysis of factors that affect mobility and performance." *J Rehabil Res Dev* 23.4 (1986): 19-26.
- [14] Cossalter, V. (2006). *Motorcycle dynamics*. Estados Unidos: Lulu.
- [15] Genta, Giancarlo, and Cristiana Delprete. "Some considerations on the experimental determination of moments of inertia." *Meccanica* 29.2 (1994): 125-141.
- [16] Winter, David A. *Biomechanics and motor control of human movement* John Wiley & Sons, 2009.

5.2. Desenho de Blocos para extração de dados do tacômetro



5.3. Filtro do sinal obtido pelo tacômetro + Cálculo do Momento de Inércia

```

6. % foufilter3.m
   clear, clc, close all

   % SINAL
   load('.\Dados Experimentais Oscilacao\Oscilacao_Peq.mat')

   plot(t,y_rpm);

   Ti = input('Ti: ');
   Tf = input('Tf: ');

   Fi = 0;
   Ff = 6;

   % PLOTS
   famost = 1/(t(2)-t(1));
   over = 1;
   [y,ty,xy,med] = foufilter3(y_rpm,t,Ti,Tf,over,famost,Fi,Ff);
   figure(1)
   plot(t,y_rpm,'-c',ty,y,'-k')

```

```
grid

% Determinação dos picos
amp_max = ones(1,100);      pos_max = zeros(1,30);
n_max = 1;                  flag_max = 1;
count_max = 0;              value_max = 0;
T = length(ty);
for i=1:T-1
    if (y(i+1) > y(i)) && (y(i+1) > amp_max(n_max))
        amp_max(n_max) = y(i+1);
        value_max = y(i+1);
        flag_max = 1;
        pos_max(n_max) = i;
    end

    if flag_max == 1 && value_max == amp_max(n_max)
        count_max = count_max + 1;
    end
    if count_max == 720;
        n_max = n_max + 1;
        count_max = 0;
        flag_max = 0;
        value_max = 0;
    end
end

% Rebatimento %
p = length(pos_max);
new_pos_max(1:p) = pos_max(1:p);
harm = zeros(T,1);
n_p=1;
for i=1:T
    if n_p < n_max-3
        t_dif = t(new_pos_max(n_p+2))-t(new_pos_max(n_p));
    else
        t_dif = t(new_pos_max(n_p+1))-t(new_pos_max(n_p-1));
    end
    modulo = mod(n_p,2);
    if(modulo==1)
        if t(i) < t(new_pos_max(n_p))+t_dif/4
            harm(i) = y(i);
        else
            harm(i) = -y(i);
            if t(i) > t(new_pos_max(n_p))+ 3*t_dif/4 && n_p < n_max-2
                n_p = n_p + 1;
            end
        end
    else
        harm(i) = y(i);
        if t(i) > t(new_pos_max(n_p))+ 3*t_dif/4 && n_p < n_max-2
            n_p = n_p + 1;
        end
    end
end
```

```

        end
    end
end

fig2 = figure;
plot(ty,harm)
title('Dados Extraídos do Experimento')
legend('Oscilação Harmônica do Experimento')
xlabel('Tempo em segundos (s)')
ylabel('Rotação em RPM')
hgexport(fig2, 'figure2.jpg', hgexport('factorystyle'), 'Format', 'jpeg');

% Momento de Inercia %
w = sys_wheelchair;
for n=1:n_max-3
    T(n) = t(pos_max(n+2))-t(pos_max(n));
    J(n) = moment_of_inertia(w.Mc,w.g,w.l,T(n));
end
%f_amort_med = median(f_amort);
Jmed = median(J)

```

6.1. Centro de massa do usuário

```

function [ q, Jr ] = parameters(varargin)
% [q, Jr] : Function returns the vector formed by the rear axle and
% center of mass. In addition, it returns the moment of inertial.
%
% H: Height of the user
% Px: Longitudinal distance between pelvis and rear axle
% Py: Horizontal distance between pelvis and rear axle
% M: Mass of the user
%
% q: [qx qy]: Vector of the center of mass to center of wheel
% Jpg: Moment of Inertial in Gp coordinates

% Inputs of the function
H = varargin{1};
Px = varargin{2};
Py = varargin{3};
switch nargin
    case 3
        M = 25*H^2; % Using BMI
    case 4
        M = varargin{4};
    otherwise
        error('Unexpected inputs')
end

```

end

% Angles of the joints

syms a1 a2 a3 a4 a5;

% Body Segment lengths -----

l(1) = (2/3)*0.152*H; % Foot
l(2) = 0.039*H ; %
l(3) = 0.285*H - (l(2)); % Leg - Medial malleolus - Femoral condyles
l(4) = 0.530*H - (l(2)+l(3)); % Thigh
l(5) = 0.818*H - (l(2)+l(3)+l(4)); % HAT

% Mass of each segment -----

m(1) = 0.0145*M; % Mass of foot
m(2) = 0; %
m(3) = 0.0465*M; % Mass of leg
m(4) = 0.1000*M; % Mass of thigh
m(5) = 0.6780*M; % Mass of HAT - Head, arms and trunk

% Center of mass of each segment -----

cm(1) = sqrt((0.0351*H/1.8)^2+(0.0768*H/1.8)^2); % Center of Mass - foot
cm(2) = 0; %
cm(3) = 0.433*l(3); % Center of Mass - leg
cm(4) = 0.433*l(4); % Center of Mass - thigh
cm(5) = 0.626*l(5); % Center of Mass - HAT

% Radius of Gyration/Segment Length -----

rog(1) = 0.475; % Foot
rog(2) = 0;
rog(3) = 0.302; % Leg
rog(4) = 0.323; % Thigh
rog(5) = 0.496; % HAT

% Direct kinematics of -----

b1 = a1;
b2 = b1 + a2;
b3 = b2 + a3;
b4 = b3 + a4;
b5 = b4 + a5;

x1 = l(1)*cos(b1);
y1 = l(1)*sin(b1);
x2 = l(1)*cos(b1) + l(2)*cos(b2);
y2 = l(1)*sin(b1) + l(2)*sin(b2);
x3 = l(1)*cos(b1) + l(2)*cos(b2) + l(3)*cos(b3);
y3 = l(1)*sin(b1) + l(2)*sin(b2) + l(3)*sin(b3);
x4 = l(1)*cos(b1) + l(2)*cos(b2) + l(3)*cos(b3) + l(4)*cos(b4);
y4 = l(1)*sin(b1) + l(2)*sin(b2) + l(3)*sin(b3) + l(4)*sin(b4);
x5 = l(1)*cos(b1) + l(2)*cos(b2) + l(3)*cos(b3) + l(4)*cos(b4) + l(5)*cos(b5);
y5 = l(1)*sin(b1) + l(2)*sin(b2) + l(3)*sin(b3) + l(4)*sin(b4) + l(5)*sin(b5);

```
% Stantard position of user -----
a1 = pi;
a2 = -pi/2;
a3 = 0;
a4 = pi/2;
a5 = -pi/2;

% Coordinates of joints -----
X(1) = 0;
Y(1) = 0;
X(2) = eval(x1);
Y(2) = eval(y1);
X(3) = eval(x2);
Y(3) = eval(y2);
X(4) = eval(x3);
Y(4) = eval(y3);
X(5) = eval(x4);
Y(5) = eval(y4);
X(6) = eval(x5);
Y(6) = eval(y5);

% Coordinates of center of mass for each segment -----
cx1 = 0.5*l(1)*cos(b1);
cy1 = 0.5*l(1)*sin(b1);
cx2 = l(1)*cos(b1) + 0.5*l(2)*cos(b2);
cy2 = l(1)*sin(b1) + 0.5*l(2)*sin(b2);
cx3 = l(1)*cos(b1) + l(2)*cos(b2) + (l(3)-cm(3))*cos(b3);
cy3 = l(1)*sin(b1) + l(2)*sin(b2) + (l(3)-cm(3))*sin(b3);
cx4 = l(1)*cos(b1) + l(2)*cos(b2) + l(3)*cos(b3) + (l(4)-cm(4))*cos(b4);
cy4 = l(1)*sin(b1) + l(2)*sin(b2) + l(3)*sin(b3) + (l(4)-cm(4))*sin(b4);
cx5 = l(1)*cos(b1) + l(2)*cos(b2) + l(3)*cos(b3) + l(4)*cos(b4) + cm(5)*cos(b5);
cy5 = l(1)*sin(b1) + l(2)*sin(b2) + l(3)*sin(b3) + l(4)*sin(b4) + cm(5)*sin(b5);

Cx(1) = eval(cx1);
Cy(1) = eval(cy1);
Cx(2) = eval(cx2);
Cy(2) = eval(cy2);
Cx(3) = eval(cx3);
Cy(3) = eval(cy3);
Cx(4) = eval(cx4);
Cy(4) = eval(cy4);
Cx(5) = eval(cx5);
Cy(5) = eval(cy5);

% Fix the (0,0) in the pelvis
X = X + (l(1) + l(4));
Y = Y - (l(2) + l(3));
Cx = Cx + (l(1) + l(4));
Cy = Cy - (l(2) + l(3));

% Center of Mass of the Pacient -----
```

```

CMPx = 0; CMPy = 0; Mt = 0;
for i=1:5
    if i<5 % foot, leg and thigh (2X)
        CMPx = CMPx + 2*Cx(i)*m(i);
        CMPy = CMPy + 2*Cy(i)*m(i);
        Mt = Mt + 2*m(i);
    else % HAT (1K)
        CMPx = CMPx + Cx(i)*m(i);
        CMPy = CMPy + Cy(i)*m(i);
        Mt = Mt + m(i);
    end
end
CMPx = CMPx/Mt;
CMPy = CMPy/Mt;

% Moment of Inertia of Patient in Cmp -----
Jog = zeros(5,1); Jo = zeros(5,1);
for i=1:5
    Jo(i) = m(i) * (l(i) * rog(i))^2; % Moment of Inertia for each joint
    if i<5 % foot, leg and thigh (2X)
        Jog(i)= 2*(Jo(i) + m(i) * ((Cx(i)-CMPx)^2 + (Cy(i)-CMPy)^2));% (Cx, Cy) : Center
of Mass of each Joint % (CMPx, CMPy) :
Center of Mass of User
    else % HAT (1X)
        Jog(i)= Jo(i) + m(i) * ((Cx(i)-CMPx)^2 + (Cy(i)-CMPy)^2); % (Cx, Cy) : Center
of Mass of each Joint % (CMPx, CMPy) :
Center of Mass of User
    end
end
Jpg = sum(Jog); % Sum of the Moment of Inertia

w = sys_wheelchair;

% Moment of Inertia of Wheelchair in Cmc -----
Jcg = w.Jc; % [kg*m^2] Obtained experimentally
CMcx = 0.193; % [m] Obtained experimentally
CMcy = -0.173; % [m] Obtained experimentally

% Resultant center of mass -----
CMr = zeros(2,1);
CMr(1,1) = (CMPx*Mt + CMcx*w.Mc) / (Mt + w.Mc);
CMr(2,1) = (CMPy*Mt + CMcy*w.Mc) / (Mt + w.Mc);

% Vector q -----
q = zeros(2,1);
q(1,1) = CMr(1,1) - Px;
q(2,1) = CMr(2,1) - Py;

q

```

```
x = q(1,1)*w.g/(q(2,1)+w.R)
tau_lim = (w.Mcr + w.JR/(w.R^2))*w.R*x

% Resultant moment of inertia in CG -----
Jr = Jpg + Mt * ((CMpx - CMr(1,1))^2 + (CMpy - CMr(2,1))^2) + ...
    Jcg + w.Mc * ((CMcx - CMr(1,1))^2 + (CMcy - CMr(2,1))^2);

% Plots -----
figure
hold on
plot(X,Y,'b -o');
plot(CMr(1,1), CMr(2,1), 'r x');
plot(Cx, Cy, 'k d');
plot(CMpx, CMpy, 'm x');
plot(CMcx, CMcy, 'm x');
plot(Px, Py, 'k x');
circle(Px,Py,0.305, 'k');

title('Center of Mass of the Human Body');
axis([-1 1 -1 1.5]);
axis equal;
xlabel('Meters [m]');
ylabel('Meters [m]');
grid

end
```

6.2. Torque necessário para realizar o *wheeling*

```
N = 40; % Number of interaction
h_step = linspace(1.6, 1.9, N); % Height of the user
m_step = 25.*h_step.^2; % Using BMI 25

% wheelchair parameters
w = sys_wheelchair;

% Center of Gravity of wheelchair
CG_wc = [0.193; -0.173]; % Em relação ao hip

% Deslocamento
d_step = linspace(-0.05, 0.15, N);

% Center of Gravity for the users (1.6 - 1.9 m)
CG_step = zeros(2,N);
torque_step = zeros(2,N);

[X,Y] = meshgrid(d_step, h_step);
```

```
CGx = zeros(length(h_step), length(d_step));
CGy = zeros(length(h_step), length(d_step));
for i=1:N
    cgi = solveCG(h_step(i), m_step(i));
    CG_step(1,i) = cgi(1,1);
    CG_step(2,i) = cgi(2,1);

    for ii=1:length(d_step)
        CGx(i,ii) = (CG_step(1,i)*m_step(i) + CG_wc(1,1)*w.Mcr)/(m_step(i) + w.Mcr) +
d_step(ii);
        CGy(i,ii) = (CG_step(2,i)*m_step(i) + CG_wc(2,1)*w.Mcr)/(m_step(i) + w.Mcr);

        torque_step(i,ii) = w.R*((w.Mcr+m_step(i)) + 2*(w.JR/w.R^2 + ...
            w.Jr/w.r^2))*CGx(i,ii)*w.g/(CGy(i,ii) + 0.5356) + w.FR + w.Fr);
    end
end

contourf(X.*100, Y, torque_step, 'showText', 'on')
title('Lift off torque [N.m]')
xlabel('Longitudinal distance of rear axle and hip [cm]');
ylabel('User's stature[m]');

% Add mass
hold on
box off
a2 = axes('YAxisLocation', 'Right');
set(a2, 'color', 'none');
set(a2, 'XTick', []);
set(a2, 'YLim', [m_step(1) m_step(end)]);
a2.YLabel.String = 'Mass of the user [kg]';
```

6.3. Função para simular graficamente a lei de controle

```
7. function drawwheelchair(time, pos, phio, phi, extents)
% drawwheelchair(time,pos,phi, extents)
%
% INPUTS:
%   time = [scalar] = current time in the simulation
%   pos = [scalar] = position of the rear axle
%   extents = [xLow, xUpp, yLow, yUpp] = boundary of the draw window
%
% OUTPUTS:
%   --> Draw of the wheelchair, "at least, part of the wheel"

% Make plot objects global
global pushrimHandle r_wheelHandle r_axleHandle ...
    f_wheelHandle f_axleHandle chairHandle;

wheelColor = [0.96, 0.96, 0.96]; % [R, G, B]
```

```

r_wheel_size = 24*0.0254;
f_wheel_size = 8*0.0254;
pushrim_size = 20*0.0254;
diff_wp = (r_wheel_size - pushrim_size)/2;

vec_wheelx = 0.650; % vector between rear and front
wheel
vec_wheely = (f_wheel_size-r_wheel_size)/2; % vector between rear and front
wheel
vec_wheelx = vec_wheelx*cos(phio-phi) - vec_wheely*sin(phio-phi); % rotational of the
vector
vec_wheely = vec_wheelx*sin(phio-phi) + vec_wheely*cos(phio-phi); % rotational of the
vector

f_wheel_posx = vec_wheelx + pos;
f_wheel_posy = vec_wheely + r_wheel_size/2;

vec_chairx = 0;
vec_chairy = 0.59;
vec_chairx = vec_chairx*cos(phio-phi) - vec_chairy*sin(phio-phi); % rotational of the
vector
vec_chairy = vec_chairx*sin(phio-phi) + vec_chairy*cos(phio-phi); % rotational of the
vector

px = vec_chairx + pos;
py = vec_chairy + r_wheel_size/2;

% Title and simulation time:
title(sprintf('whelling simulation ... t = %2.2f%',time));

% Draw the pole:
if isempty(chairHandle)
    chairHandle = plot([pos, px], [r_wheel_size/2, py],...
        'Linewidth',4,...
        'Color',[1,0,0]);
else
    set(chairHandle,...
        'xData',[pos, px],...
        'yData',[r_wheel_size/2, py]);
end

% Draw the wheel:
if isempty(r_wheelHandle)
    r_wheelHandle = rectangle(...
        'Position',[pos-r_wheel_size/2 0 r_wheel_size r_wheel_size],...
        'Curvature',[1,1],... % <-- Draws a circle...
        'Linewidth',4,...
        'FaceColor',wheelColor,...
        'EdgeColor',0.1*wheelColor);
else
    set(r_wheelHandle,...

```

```
        'Position',[pos-r_wheel_size/2 0 r_wheel_size r_wheel_size]);
end

% Draw the pushrim:
if isempty(pushrimHandle)
    pushrimHandle = rectangle(...
        'Position',[pos-pushrim_size/2 diff_wp pushrim_size pushrim_size],...
        'Curvature',[1,1],...
        'Linewidth',2,...
        'FaceColor',wheelColor,...
        'EdgeColor',0.1*wheelColor);
else
    set(pushrimHandle,...
        'Position',[pos-pushrim_size/2 diff_wp pushrim_size pushrim_size]);
end

% Draw the front wheel:
if isempty(f_wheelHandle)
    f_wheelHandle = rectangle(...
        'Position',[f_wheel_posx-f_wheel_size/2 f_wheel_posy-f_wheel_size/2 f_wheel_size
f_wheel_size],...
        'Curvature',[1,1],...
        'Linewidth',4,...
        'FaceColor',wheelColor,...
        'EdgeColor',0.1*wheelColor);
else
    set(f_wheelHandle,...
        'Position',[f_wheel_posx-f_wheel_size/2 f_wheel_posy-f_wheel_size/2 f_wheel_size
f_wheel_size]);
end

% Draw the rear axle:
if isempty(r_axleHandle)
    r_axleHandle = rectangle(...
        'Position',[pos-0.01 r_wheel_size/2-0.01 0.02 0.02],...
        'Curvature',[1,1],...
        'Linewidth',2,...
        'FaceColor',[1,1,1],...
        'EdgeColor',[0,0,0]);
else
    set(r_axleHandle,...
        'Position',[pos-0.01 r_wheel_size/2-0.01 0.02 0.02]);
end

% Draw the rear axle:
if isempty(f_axleHandle)
    f_axleHandle = rectangle(...
        'Position',[f_wheel_posx-0.01 f_wheel_posy-0.01 0.02 0.02],...
        'Curvature',[1,1],...
        'Linewidth',2,...
        'FaceColor',[1,1,1],...
```

```

        'EdgeColor',[0,0,0]);
else
    set(f_axleHandle,...
        'Position',[f_wheel_posx-0.01 f_wheel_posy-0.01 0.02 0.02]);
end

% Format the axis so things look right:
axis equal; axis(extents); axis off;

% Push the draw commands through the plot buffer
drawnow;

end

```

7.1. Modelo não linear

```

8. function [sys,x0,str,ts,simStateCompliance] = modelo_naolinear(t,x,u,flag,pars)
switch flag
case 0
    Phi_i = pars.phi0; % ângulo inicial
    xi = [Phi_i 0 0 0]'; % estado inicial
    [sys,x0,str,ts,simStateCompliance] = mdlInitializeSizes(xi);
case 1
    sys = mdlDerivatives(t,x,u,pars);
case {2,9}
    sys = [];
case 3
    sys = mdlOutputs(t,x);
otherwise
    DASTudio.error('Simulink:blocks:unhandledFlag', num2str(flag));
end

function [sys,x0,str,ts,simStateCompliance] = mdlInitializeSizes(xi)
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 4;
sizes.NumDiscStates = 0;
sizes.NumOutputs = 4;
sizes.NumInputs = 2;
sizes.DirFeedthrough = 0;
sizes.NumSampleTimes = 1;

sys = simsizes(sizes);
str = [];
x0 = xi;
ts = [0 0]; % sample time: [periodo, offset]
simStateCompliance = 'DefaultSimState';

function sys = mdlDerivatives(t,x,u,pars)

```

```
Jc = pars.Jc;           % Momento Inércia cadeira (Kg.m2)
g = pars.g;           % Aceleração gravitacional
Mr = pars.Mr;        % Massa de uma roda (kg)
Mc = pars.Mc;        % Massa (kg)
JR = pars.Jr;        % Momento de Inercia da roda traseira (Kg.m2)
R = pars.R;          % Raio da roda traseira(m)- diametro 22"
l = pars.L;          % Distancia até o centro de gravidade (m)
H = pars.H;
Phi_i = pars.phi0;
Px = pars.Px;
Py = pars.Py;
tau_lim = pars.tau_lim;

M = [ JR+(Mr+Mc)*(R^2)   Mc*R*l*cos(x(1))
      Mc*R*l*cos(x(1))   Jc+Mc*l^2      ];

K = [ -Mc*R*l*(x(2))^2*sin(x(1))
      -Mc*g*l*sin(x(1))      ];

A = inv(M)*( [1;-1]*u(1) - K );           % u1 = Tau

sys = [ x(2)
        A(2)
        x(4)
        A(1) ] + [0; 1; 0; 0]*u(2); % u2 = distúrbio

function sys = mdlOutputs(t,x)
sys = x;
```

9. Referências bibliográficas

- Ackermann, M.; Leonardi, F.; Costa, H.R.; Fleury, A.T., “Modeling and optimal control formulation for manual wheelchair locomotion: the influence of mass and slope on performance”, IEEE BioRob 2014, São Paulo, 6 pgs., 2014.
- Alber, Sistema Modular E-Motion, <http://www.alber.de> – consultado em 03/2014.
- Becker, M., “Aplicação de Tecnologia Assistida e Técnicas de Controle em Cadeiras de Rodas Inteligentes”, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 147 folhas, 2012.
- Cooper, R. A., Ohnabe, H., & Hobson, D. A. (2007). An introduction to rehabilitation engineering. Boca Raton: Taylor & Francis.

- Cooper, R. A., Quatrano, L. A., Axelson, P. W., & Harlan, W. (1999). Research on physical activity and health among people with disabilities: a consensus statement. *Journal of rehabilitation research and development*, 36(2), 142.
- Cossalter, V. (2006). *Motorcycle dynamics*. Estados Unidos: Lulu.
- Denison, I. "Manual Wheelchair Skills". Equipment Evaluation Service, 2013.
- Genta, G., & Delprete, C. (1994). Some considerations on the experimental determination of moments of inertia. *Meccanica*, 29(2), 125-141.
- Gordon, J., Kauzlarich, J. J., & Thacker, J. G. (1989). Tests of two new polyurethane foam wheelchair tires. *J Rehabil Res Dev*, 26(1), 33-46.
- Hofstad, M., & Patterson, P. E. (1994). Modelling the propulsion characteristic of a standard wheelchair. *Journal of rehabilitation research and development*, 31, 129-129.
- Kamenetz, H. L. (1969). A brief history of the wheelchair. *Journal of the history of medicine and allied sciences*, 24(2), 205-210.
- Kauzlarich, J. J., and J. G. Thacker. "A theory of wheelchair wheelie performance." *Journal of rehabilitation research and development* 24.2 (1986): 67-80.
- Kirby, R. Lee, et al. "The manual wheelchair wheelie: A review of our current understanding of an important motor skill." *Disability and Rehabilitation: Assistive Technology* 1.1-2 (2006): 119-127.
- Kirby, R. Lee, Judy A. Lugar, and Catharine Breckenridge. "New wheelie aid for wheelchairs: controlled trial of safety and efficacy." *Archives of physical medicine and rehabilitation* 82.3 (2001): 380-390.
- Silva, O. M.; Del'acqua, R. J. *Cadeira de rodas e sua evolução histórica - Tecnologia Assistiva - Centro de Referências FASTER - 2005*. Disponível em: <<http://www.crfaster.com.br/cadeira%20rodas.htm>> Acesso em 08 Ago. 2015
- Takahashi, Yoshihiko, et al. "Back and forward moving scheme of front wheel raising for inverse pendulum control wheel chair robot." *Robotics and Automation*, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on. Vol. 4. IEEE, 2001.
- Takahashi, Yoshihiko, Nobutake Ishikawa, and Tomomichi Hagiwara. "Soft raising and lowering of front wheels for inverse pendulum control wheel chair robot." *Intelligent*

Robots and Systems, 2003. (IROS 2003). Proceedings. 2003 IEEE/RSJ International Conference on. Vol. 4. IEEE, 2003.

Takahashi, Yoshihiko, Shigenori Machida, and Shinobu Ogawa. "Analysis of front wheel raising and inverse pendulum control of power assist wheel chair robot." Industrial Electronics Society, 2000. IECON 2000. 26th Annual Conference of the IEEE. Vol. 1. IEEE, 2000.

Takahashi, Yoshihiko, Shinobu Ogawa, and Shigenori Machida. "Front wheel raising and inverse pendulum control of power assist wheel chair robot." Industrial Electronics Society, 1999. IECON'99 Proceedings. The 25th Annual Conference of the IEEE. Vol. 2. IEEE, 1999.

Takahashi, Yoshihiko, Shinobu Ogawa, and Shigenori Machida. "Step climbing using power assist wheel chair robot with inverse pendulum control." Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA'00. IEEE International Conference on. Vol. 2. IEEE, 2000.

Van der Woude, L. H. V., Veeger, H. E. J., Dallmeijer, A. J., Janssen, T. W. J., & Rozendaal, L. A. (2001). Biomechanics and physiology in active manual wheelchair propulsion. *Medical engineering & physics*, 23(10), 713-733.

Winter, David A. *Biomechanics and motor control of human movement*. John Wiley & Sons, 2009